

Биссектриса и серединный перпендикуляр

Геометрическим местом точек (сокращённо **ГМТ**) называется множество точек плоскости, удовлетворяющих определённому условию.

- (а)** Докажите, что ГМТ точек, равноудалённых от данных точек A и B (т.е. ГМТ таких X , что $AH = BH$), является серединный перпендикуляр к отрезку AB .

(б) Докажите, что ГМТ точек, находящихся внутри данного угла и равноудалённых от его сторон, является биссектриса этого угла.
- Найдите ГМТ точек, равноудалённых от двух данных прямых.
- Даны отрезок и прямая. В каком случае на прямой **(а)** существуют две точки, равноудалённые от A и B ? **(б)** таких точек нет?
- (а)** Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку AC тоже проходит через O .

(б) Биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника ABC пересекаются в точке I . Докажите, что биссектриса угла $\angle C$ тоже проходит через I .
- Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что на плоскости существуют две такие точки, что $AO = DO$ и $BO = CO$. Докажите, что стороны BC и AD параллельны.
- В трапеции $ABCD$ провели высоту XH (X лежит на основании BC , а H на основании AD). Пусть M – середина XH . Оказалось, что BM – биссектриса $\angle ABC$. Докажите, что AM – биссектриса $\angle BAD$.
- Точки M и N — середины **равных** сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P .
- Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Серединные перпендикуляры к диагоналям BD и AC пересекают сторону AD в точках X и Y соответственно, причём X лежит между A и Y . Оказалось, что прямые BX и CY параллельны. Докажите, что прямые BD и AC перпендикулярны.
- Внешние биссектрисы углов при вершинах A и C пересекаются в точке I_B . Пусть I_BH – это перпендикуляр, опущенный из I_B на прямую AB . Докажите, что BH равен половине периметра треугольника ABC .
- Угол B треугольника ABC равен 120° . Точки D , E и F — основания биссектрис треугольника, проведённых из вершин A , B и C соответственно. Докажите, что $\angle DEF = 90^\circ$.