

Доказательства от противного

Пример 1 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, причем на них никто не заходит. Докажите, что обязательно будут хотя бы 2 остановки, на которых вышло одинаковое количество пассажиров.

Доказательство: Пусть это не так. То есть нет 2 остановок, на которых вышло одинаковое число пассажиров. Тогда на всех остановках вышло разное количество людей. Значит, вышло не менее $0+1+2+3+4+5+6+7+8=36$ человек, а людей было всего 34. Получаем противоречие. Значит, хотя бы 2 такие остановки есть.

Пример 2 Суммарное количество яблок у 7 человек – 23 штуки. Докажите, что из них можно выбрать трех человек так, что вместе они смогут испечь пирог из 10 яблок.

Доказательство: Предположим противное. Пусть нельзя выбрать 3 человек, соответствующих условиям задачи. То есть у любых 3 человек в сумме должно быть не более 9 яблок. Тогда у 6 человек в сумме должно быть не более 18 яблок, а так как всего их 23, то у оставшегося седьмого человека должно быть минимум 5 яблок. Поскольку это можно сказать обо всех шестерках людей, то у всех людей минимум 5 яблок. Но тогда всего яблок было бы не меньше $7 \cdot 5 = 35$, а их 23. Получаем противоречие. Значит, таких людей выбрать можно.

Пример 3 На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьет какого-нибудь другого ферзя.

Доказательство: Пусть это не так. То есть какой-нибудь ферзь никого не бьет. Тогда есть 7 клеток, которые с ним в одной вертикали, 7 клеток, которые с ним в одной горизонтали и не менее 7 клеток, которые в одной диагонали. То есть если ферзь никого не бьет, то найдётся как минимум 21 свободная клетка. Но тогда всего клеток не менее $21 + 44 = 65$, а на шахматной доске их только 64. Получаем противоречие. Значит, каждый ферзь кого-то бьет.

1. а) Докажите, что в любой математической страте из 12 человек есть двое, которые родились в один и тот же день недели.

б) При каком наименьшем количестве учеников в школе среди них найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

в) На кружок в 444 пришло 32 семиклассника. Докажите, что среди них найдутся хотя бы двое, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

2. По кругу лежит 17 клубков шерсти двух цветов. Докажите, что найдутся два соседних клубка одного цвета.

3. Можно ли распределить 44 учеников в 9 классов так, чтобы количество детей в разных классах было различным?

4. В маршрутке едут 20 математиков, и у каждого в кошельке несколько монеток по 10, 15 и 20 копеек. Проезд стоит 5 копеек. Смогут ли они расплатиться, использовав:

а) 24 монеты;

б) 25 монет?

Замечание: Математики так же могут меняться монетами друг с другом!

5. В приюте живет 401 котенок, каждый — одного из 21 цветов. Докажите, что в приюте найдутся 21 одноцветных котят, либо 21 разноцветных котят.

6. Алиса научила кролика прыгать по доске 8×8 на одну клетку по горизонтали или вертикали. Королева положила черного кролика на полностью белую доску. Прыгнув в клетку, кролик или сам становится ее цвета, или меняет цвет клетки на свой. Кролик станет свободным, если раскрасит доску в шахматном порядке. Удастся ли кролику освободиться?