

Графы

Определение. *Граф* — множество точек, некоторые из которых соединены отрезками. Точки называются *вершинами* графа, отрезки — *ребрами*.

- (a) Нарисуйте 8-угольную пирамиду. Сколько у неё вершин и рёбер?

(b) Нарисуйте кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$. Вершины единичных квадратиков – вершины, стороны единичных квадратиков – рёбра. Сколько тех и других?
- Волшебная страна Фарг почти вся состоит из непреодолимых гор и рек. В ней есть шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Известно, что из А проложены дороги в Б и Г, из Б — в А, Г и Д, из В — в Г и Е, из Г — в В и Д, из Д — в Б и Г, из Е — только в В. Все остальные дороги непроходимы.

(a) Нарисуйте карту страны Фарг.

(b) Нарисуйте карту так, чтобы дороги не пересекались.

(c) Может ли житель города А попасть в город Д, если ему нельзя проходить через Г?

(d) Сможет ли он при тех же условиях попасть в город Е?
- В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Определение. *Степень вершины* – это число выходящих из нее ребер.

- Сколько рёбер в полном графе (a) на 4 вершинах?

(b) На 10 вершинах?

(c) На n вершинах?
- Докажите лемму.** Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.
- Докажите лемму.** (О рукопожатиях). В конечном графе число вершин нечетной степени – чётно.
- Могут ли степени вершин в графе быть равны:

(a) 5, 2, 3, 1, 3?

(b) 8, 8, 8, 6, 5, 4, 2, 2, 1?

(c) 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2?
- (a) В стране 444 города, из каждого выходит по 7 дорог. Сколько всего дорог в стране?

(b) Может ли в стране, где из каждого города выходит по 7 дорог, быть ровно 100 дорог?
- Вася считает, что в его классе у всех разное число друзей-одноклассников. Не ошибается ли он?