Индукция

Метод **математической индукции** позволяет во многих случаях строго доказывать справедливость общего утверждения $P(n)$, в формулировку которого входит натуральное число n. Применение метода включает 3 этапа.

1. **База индукции:** проверяем справедливость утверждения для одного или нескольких начальных значений.
2. **Предположение индукции:** предполагаем, что $P(n)$ справедливо при $n = k$.
3. **Переход:** используя предположение, доказываем, что $P(n)$ справедливо для $n = k+1$. (Шаг может быть и не 1, например, мы можем доказать, что $P(n)$ справедливо не для $n = k + 1$, а для $n = k + 3$ или $n = k + 10$).

В результате можно сделать вывод о справедливости $P(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, для $n = 1$ утверждение верно (база индукции). А следовательно, верно и для $n = 2$, так как переход от $n = 1$ к $n = 2$ обоснован (шаг индукции). Применяя шаг индукции снова и снова, получаем справедливость $P(n)$ для n = 3, 4, 5, ... , т. е. справедливость $P(n)$ для всех n.

1. Докажите, что трёхкопеечными и пятикопеечными монетами можно выдать любую сумму, большую 7 копеек.
2. Из квадратной таблицы со стороной, равной 2^n, где n - натуральное число, удалили угловую ячейку. Докажите, что полученную фигуру всегда можно разделить на трёхклеточные уголки.

Задачи

1. Вупсень рвет каждый попадающий ему в руки кусок бумаги на 4 части, а Пупсень — на 6. Докажите, что объединенными усилиями они могут разорвать газету на любое количество частей, начиная с девяти.

2. Перед вами есть 2^n банок с водой. За один ход разрешается выбрать две банки и уравнять количество воды в них. Покажите, как за несколько ходов добиться того, чтобы во всех банках воды было поровну.

3. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении n : (n + 1), где n – любое натуральное число. Докажите, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении.

4. Покажите, как представить 1 в виде суммы n различных дробей с числителем 1, где n>2.

5. Докажите, что существует число, которое равно сумме n своих различных делителей для любого натурального $n>2$.

6. В концах диаметра окружности стоят единицы. На первом шаге каждая из получившихся дуг делится пополам, и в её середине пишется сумма чисел, стоящих в концах. Затем то же самое делается с каждой из четырёх полученных дуг и т.д. Такая операция проделывается n раз. Найти сумму всех полученных чисел.

7. Докажите, что если плоскость разбита на части a) прямыми, b) прямыми и окружностями, то получившуюся карту можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.