

Основная теорема арифметики и около неё

0. Вспомните признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11

1. а) Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно обязательно делится и на 24? б) Верно ли, что если натуральное число делится на 3 и на 4, то оно обязательно делится и на 12? в) Число a чётно. Верно ли, что $3a$ делится на 6?

2. Какую цифру можно написать вместо звёздочки так, чтобы число

(а) $269*6$ делилось на 4?

(б) $2*45$ делось на 9?

(с) $2*45$ делилось на 3?

(д) $5417*$ делилось на 6?

Во всех пунктах этой задачи необходимо найти все возможные ответы и доказать, что других ответов нет.

3. Делится ли число

(а) $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 91 - 1$ на 5?

(б) $19 \cdot 29 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 99 + 1$ на 5?

4. Фрекен Бок спрятала плюшки в сейф, а Карлсон с Малышом хотят их оттуда достать. Они знают, что код от сейфа состоит из 7 цифр — двоек и троек, причем двоек больше, чем троек. И что код делится и на 3, и на 4. Смогут ли Малыш и Карлсон с первой попытки открыть сейф?

5. На доске написано число, состоящее только из цифр 5 и 6 и делящееся на 9. У этого числа стерли три последние цифры. Оказалось, что полученное число также делится на 9. Докажите, что первоначальное число не делится на 4.

Определение: *Простым числом называется целое число больше 1, имеющее ровно два различных натуральных делителя — единицу и самого себя*

Теорема (основная теорема арифметики): *Каждое целое число $n > 1$ единственным образом можно представить в виде*

$$n = p_1^{d_1} * p_2^{d_2} * \dots * p_k^{d_k}$$

где p_1, \dots, p_k — различные простые числа, а d_1, \dots, d_k — некоторые натуральные числа

Пример: $n = 2448 = 2^4 * 3^2 * 17$

6. Разложите на простые множители а) число 444 б) число 2020 в) число 179

7. Делится ли $3 * 2^9$ на а) 7; б) 9; в) 5; г) 6; д) 8; е) 3072

8. Игорь пришёл в класс и сказал, что он умеет быстро умножать «в уме». Варя предложила ему перемножить быстро цифры какого-нибудь числа между собой и сказать результат. — «3630», — немедленно ответил Игорь. — «Ты ошибся!» — ответила, подумав, Варя. Как у неё получилось обнаружить ошибку, если она не знала исходного числа?

9. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно а) 1980? б) 1990? в) 2000?

10. Рыбак рассказал старухе, что видел в синем море метровую рыбу. Та рассказала соседке, что в море видели рыбу два метра длиной. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину рыбы вдвое, а творческие — втрое. В результате в газете написали о рыбе длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей передали новость о необычной рыбе?

11. Числа от 1 до 15 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

12. Сколько различных делителей имеет а) число 10000; б) число 924?