15 Линейные диофантовы уравнения. 16 февраля.

Теория

т1. а) В одну шушлядку входит 5 мячиков, а в одну фуфлыжку – восемь. Саня переложил несколько полных шушлядок в фуфлыжки. Оказалось, что все фуфлыжки или пусты или полны. Какое наименьшее количество мячиков он мог переложить? б) А если бы в шушлядку входило 15 мячиков, а в фуфлыжку – шесть?

т2. Хромой кузнечик Кузя умеет прыгать на 5 метров влево или на 8 метров вправо. Сколько прыжков мог сделать кузнечик прежде, чем оказался в той же точке, откуда начал свой путь? Сколько правых и сколько левых прыжков мог сделать кузнечик, если известно, что он сдвинулся на один метр влево?

т3. Кузин друг Лунтик умет прыгать на 6 метров влево и 15 метров вправо. Мог ли Лунтик через несколько прыжков оказаться на 2 метра правее исходной точки?

Рассмотрим уравнение $ax+by=c$, где a, b, c – данные целые числа (x, y — неизвестные).

т4. Если c не делится на НОД(a,b), то уравнение $ax+by=c$ не имеет решений. Если c делится на НОД(a,b), то мы\эю можем разделить обе части уравнения на НОД(a,b) и искать решение уже этого уравнения.

т5. Рассмотрим уравнение $ax+by=c$. Докажите, что если НОД(a, b) = 1 и (x_0,y_0) — решение уравнения, то пары (x_0+b, y_0-a); (x_0+2b, y_0-2a); (x_0+3b, y_0-3a); …, а также пары (x_0-b, y_0+a); (x_0-2b, y_0+2a); (x_0-3b, y_0+3a); … являются решениями нашего уравнения.

т6. Докажите, что что если НОД(a, b)= 1 и (x_0,y_0) — решение уравнения $ax+by=c$, то любое его решение имеет вид (x_0+kb, y_0-ka) при каком-то целом k.

т7. Докажите, что, если уравнение $ax+by=c$ имеет решение в целых числах, а b – положительно, то ровно одно из значений $x = 0, 1, 2, \ldots; b-2; b-1$; является решением уравнения. (Если для данного c решить уравнение сразу не удается, то можно попробовать отыскать одно решение $ax+by=1$ и умножить его на c).

Практика

1. Решите в целых числах уравнения:
а) $5x-4y=1$;
б) $9x+15y=4$;
в) $1500x+501y=2001$;
г) $-27x+12y=15$;
д) $14x-68y=8$.

2. Решите в целых числах уравнение $7!\,x+8!\,y=9!$

3. При каких целых x число $8x+3$ делится на 13?

4. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде отношения 7-й степени какого-то числа и 5-й степени какого-то числа.

5. На складе имеется тушенка в банках по 350 г и по 425 г. Для проведения операции «Буря в стакане» требуется 15 кг тушенки. Подскажите главному интенданту, сколько и каких банок заказать на складе.

6. Школьники ходили купаться на реку через большой песчаный пляж. Шедший последним Степа аккуратно провел на песке две черты, перпендикулярные направлению движения ребят, на расстоянии 10 метров друг от друга, и насчитал между ними ровно 559 следов. Сколько семиклассников ходило на реку, если известно, что длина шага каждого из них составляет 55 см?

7. Остап Бендер организовал раздачу слонов населению. На раздачу явилось 11 членов профсоюза и 15 не-членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не-членам (всем хотя бы по одному слону!). Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?

8. **Теорема Сильвестра**. Докажите, что наибольшее c, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, равно $c = ab - a - b$.

9. Решите в целых числах уравнение $20x^2 + 16y^2 = 2016$

10. Найдите наименьшее число c, для которого:

а) уравнение $11x + 14y = c$ имеет ровно 5 решений в натуральных числах.

б) уравнение $15x + 63y = c$ имеет ровно 4 решения в натуральных числах.

11. Найдите все c для которых уравнение $11x + 7y = c$ имеет ровно 5 решений в натуральных числах.

12. Решите в целых числах уравнение $6x+10y+15z = 7$.

13. Найдите все решения в натуральных числах системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 29x + 30y + 31z = 366 \end{cases}$$