

13. Графы: деревья и скелеты. 30 декабря.

Определения. *Деревом* называется связный граф без циклов. Вершина степени 1 называется *висячей вершиной*. Вершина степени 0 называется *изолированной*.

Будем рассматривать только графы с конечным числом вершин.

- t1. Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина. (*Прыгнем в одну из вершин графа и пойдём по рёбрам. Чем может закончиться путешествие?*)
- t2. Докажите, что висячих вершин в дереве по крайней мере две.
- t3. Докажите, что в дереве вершин на одну больше, чем ребер.
- t4. Докажите, что если в графе с n вершинами меньше, чем $n - 1$ ребро, то он не связан.
- t5. Докажите, что если в графе с n вершинами больше, чем $n - 1$ ребро, то в нём есть цикл.

1. Нарисуйте все возможные деревья с пятью вершинами.

Скелетом (или *остовом* или *остовным деревом*) **графа** называется подграф (часть графа), содержащий все его вершины, и являющийся деревом.

2. В связном графе V вершин и P ребер. Сколько ребер надо удалить, чтобы получить скелет этого графа?
3. Могут ли два различных скелета одного графа не иметь общих ребер?
4. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было добраться из любой вершины в любую?
5. На каждую общую сторону двух клеток шахматной доски положена спичка. Какое минимальное количество спичек придется убрать, чтобы из каждой клетки можно было дойти до каждой, не перепрыгивая через спички?
6. Все города Трапезундии (в том числе столица) соединены кольцевой железной дорогой. Кроме того, столица соединена отдельными линиями с каждым из городов, кроме соседей по кольцу. Правительство решило разделить железнодорожную сеть между двумя компаниями так, чтобы, пользуясь дорогами любой из компаний, можно было доехать от любого города до любого другого. Можно ли выполнить это решение?
7. В дереве есть 10 вершин степени 3, 15 вершин степени 4, а все остальные вершины — висячие. Сколько их?
8. Система станций метро устроена таким образом, что из каждой станции в каждую можно проехать. Докажите, что одну из станций можно закрыть так, что это свойство сохранится. (*Рассмотрите скелет этого графа*)
9. В связном графе между любыми двумя вершинами есть маршрут из не более чем трех ребер, а степень каждой вершины не более, чем 4. Докажите, что в графе не более 53-х вершин. (*Подвесьте граф за одну из вершин*)

10. Каждая грань кубика разбита на 9 квадратов. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет – всего 56 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.
11. Ребра графа, степени всех вершин которого равны 5, раскрасили в три цвета так, что по ребрам каждого цвета можно от любой вершины дойти до любой другой. Каким могло быть число вершин этого графа?
12. В дереве степени всех вершин нечётные. Докажите, что более половины его вершин – висячие.
13. Пиранья считается сытой, если съест трех других пираний. В пруд выпустили несколько пираний. Через день осталась только одна сытая рыбка, причем ровно 100 пираний погибли сытыми. Какое наименьшее число рыб могло быть выпущено в пруд вначале?
14. Есть $2n$ человек: n болеют за «Спартак» и n – за «Зенит». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «Да» или «Нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать.
15. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?