

## 12 Графы. Повторение.

1. В соревнованиях «кто кого переговорит» с пятью участниками только Яша и Эля сыграли одинаковое число встреч, а все остальные — различное, причем никакие два участника не встречались друг с другом дважды. Сколько встреч сыграли Эля и Яша?

**Определения.** Будем называть *графом* множество точек (*вершин*), некоторые из которых соединены между собой линиями (*рёбрами*). Любые две вершины могут быть соединены не более, чем одним ребром.

Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой.

Если граф *несвязен*, то он разбивается на части, которые называются *компонентами связности*. Внутри каждой компоненты связности от каждой вершины существует путь по рёбрам до любой другой вершины. Между вершинами принадлежащими разным компонентам связности такого пути нет.

### Пересчитаем графу рёбра

**Определение.** *Степенью вершины* называется количество выходящих из этой вершины рёбер. Сумма степеней вершин любой компоненты связности равна удвоенному количеству рёбер.

2. (*Лемма о рукопожатиях*) Докажите, что в любом графе количество вершин нечетной степени чётно. (За всё время существования Земли жило четное количество людей, сделавших нечетное количество рукопожатий.) То же утверждение верно для каждой компоненты связности.
3. Попробуйте придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими.
4. У Пети 5 друзей среди одноклассников. У остальных его одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Петя может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.
5. В некоторой стране 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
7. Несколько деревень связаны между собой дорогами, причем из каждой можно проехать в любую другую. Из деревни Четверкино выходит 4 дороги, из Пятеркино — 5, из Шестеркино — 6, из Семеркино — 7, из Восьмеркино — 8, а из всех остальных выходит четное число дорог. После того, как была закрыта одна из дорог, появились две такие деревни, что от одной невозможно добраться до другой. Докажите, что и от Пятеркино до Семеркино теперь тоже не доберешься.

8. В классе есть 5 задир, а остальные - молчуны. Молчуны никого не обижают. Каждый задира обижает не менее половины учеников класса. Докажите, что кого-либо из молчунов обижают более половины задир, если в классе всего 22 ученика.
9. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых, на котором знакомит их друг с другом. После того, как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека еще не познакомились. Докажите, что на следующем ужине им тоже не удастся познакомиться.
10. Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы пять друзей, а у любых двух – ровно два общих друга?
11. Есть две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть двойник в Зазеркалье и наоборот. Однако, если в Обычной стране какие-то два города соединены авиалинией, то в Зазеркалье эти города не соединены, а два любых несоединенных в Обычной стране города обязательно соединены авиалинией в Зазеркалье. В Обычной стране Алиса не может добраться из Бристоля в Ливерпуль, сделав менее двух пересадок. Докажите, что в Зазеркалье Алиса сможет перелететь из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.
12. В лесу живут 20 гномов, каждый из которых дружит по крайней мере с 14-ю другими гномами. Обязательно ли найдутся 4 гнома, которые все дружат между собой?
13. Степень всех вершин связного графа равна 10, кроме одной, степень которой равна 100. Докажите, что можно удалить 50 ребер, выходящих из этой вершины так, что граф по-прежнему останется связным.