11 Алгоритм Евклида. 16 января.

Теоретическое обоснование алгоритма

Пусть a и b – натуральные числа и $a > b$. Тогда:

а) Если a и b делятся на некоторое число d, то на d делится также и $a–b$

б) Если $a–b$ и b делятся на некоторое число d, то на это же число делится и число a

в)Тогда $НОД(a,b) \vdots НОД(a-b,b)$ и $НОД(a-b,b) \vdots НОД(a,b)$, а это означает, что НОД (a, b) = НОД$(a–b, b)$.

Пусть a и b – натуральные числа и $a>b$. Поделим a на b с остатком:

$a = bq + r$, $0 \le r < b$. Тогда НОД(a, b) = НОД(r, b)

Можно посмотреть это видео https://www.youtube.com/watch?v=2GbwMHxORHI

***Алгоритм Евклида*: для того, чтобы найти НОД двух чисел *a* и *b*, выполним последовательно несколько делений с остатком:**

$$
\begin{aligned}
a &= b\,q_1 + r_1\\
b &= r_1 q_2 + r_2\\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3\\
r_2 &= r_3 q_4 + r_4\\
&\dots\dots\dots\dots\\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n\\
r_{n-1} &= r_n\, q_{n+1}
\end{aligned}
$$

На каждом шаге предыдущий делитель делится с остатком на предыдущий остаток. Так продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге остаток не станет равен 0. Последний ненулевой остаток равен НОД(a,b).

0. Напишите программу на каком-нибудь известном вам языке программирования, которая получив на входе числа a и b, вычисляет НОД$(a;b)$ при помощи Алгоритма Евклида. Проверьте, что программа работает. Текст программы пришлите на почту *lanino@mail.ru* не позднее 20.00 понедельника 18 января. Сделайте это, пожалуйста самостоятельно.

Эти задачи нужно будет сдавать устно в Дискорде в субботу 16 января:

1. Найдите с помощью алгоритма Евклида:
а) НОД(257; 646);
б) $НОД(5a+3b, 13a+8b)$, при условии, что числа a и b – взаимнопросты.

2. Пусть n — некоторое целое число. Какие значения может принимать:
а) НОД $(3n + 7, n + 1)$? б) НОД $(2n + 1, n + 7)$? в) НОД $(3n + 2, 10n + 23)$?

3. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m-n}{5n+2m}$, если известно, что она сократима и что $НОД(m,n)=1$.

4. Найдите НОД(111...111, 1111...1111) (в записи первого числа 60 единиц, в записи второго — 100).

5. Найдите НОД всех шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений.

6. Найдите:
а) НОД(11! – 20; 10! – 20) ;
б) НОД (2^{100}– 1 ; 2^{60}–1) ;
в) Докажите, что $НОД\left(a^m-1; a^n-1\right)=a^{НОД(m,n)}-1$

7. А) На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число - разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?
Б) Та же игра, если на доске сначала записаны два натуральных числа m и n.

8. Двое играют в такую игру. На столе лежат две кучи орехов. В одной куче 1573 ореха, а в другой 97900. Очередным ходом каждый из игроков может разложить любую кучу в две кучи, хотя бы одна из которых должна совпадать по размерам с какой-нибудь из куч, имеющихся в данный момент на столе. Кто выигрывает при правильной игре?

9. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и так далее. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

10. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Побеждает тот, кто получит последний кусок - треугольник со стороной 1. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?