10 Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах)

Постановка задачи: Найти все **целые** значения переменных при которых выполняется равенство.

Основные идеи

1) *Попробовать разложить на множители.*

а) $x^2y-2xy+4x-9=0$

б) $xy=x+y+8$

2) *Разбить сумму неотрицательных слагаемых (например, на сумму квадратов) и тем самым ограничить перебор.* $3x^2 + 3y^2 - 2xy = 15$

3) *Рассмотреть остатки по какому-либо* модулю. *Часто полезно рассмотреть остатки по модулю, являющемуся каким-то коэффициентом или его делителем. Квадраты натуральных чисел по модулю* 3 и 4 *сравнимы только с* 0 и 1, *по модулю* 5 *сравнимы с* 0 , 1 и –1. *Кубы целых чисел по модулям* 7 и 9 *сравнимы только с* 0, 1 и –1. *И так далее.* $x^2 - 7y = 10$; $x^3 + 21y^2 = -5$

4) *Комбинация нескольких вышеупомянутых идей :* $3^m + 7 = 2^n$

5) *Метод бесконечного спуска:* Докажите, что уравнение $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$ не имеет решений в натуральных числах.

Задачи

Решите в натуральных числах уравнения:

1. а) $x^2 - y^2 = 17$; б) $4x^2 = y^2 + 44$;

2. а) $a^2+2ab+2b^2 = 130$; б) $x^m - y^m = 7$

Решите в целых числах уравнения:

3. а) $a^2-3b^2=8$; б) $a^2-3b^2=10$

4. а) $15x^2 - 7y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 8n - 1$

5. $2x^2 - y^3=6$

6. $x! + y! = z!$

7. $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$

8. $3\cdot 2^n+1=m^2$

9. $x^2 + y^2= x + y +2$

10. а) $x^3-3y^3-9z^3=0$ б) $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$.

11. Вокруг круглого стола стоят n стульев. По очереди в комнату входят люди. Первый человек садится на один из стульев, второй занимает соседний от него стул справа, третий человек – второй справа стул от второго, следующий – третий стул справа от третьего (считая как свободные, так и занятые стулья). И так далее. При каком n удастся таким образом занять все места?