

09 Признаки равноостаточности. 05 декабря

Признак равноостаточности при делении на 3. Любое натуральное число при делении на 3 дает такой же остаток, как и его сумма цифр. То же самое можно сформулировать в терминах сравнения по модулю: Любое натуральное число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 3.

Признак равноостаточности при делении на 9. Любое натуральное число при делении на 9 дает такой же остаток, как и его сумма цифр.

Признак равноостаточности при делении на 11. Любое натуральное число при делении на 11 дает такой же остаток, как и его знакопеременная сумма цифр.

Докажем признак равноостаточности при делении на 11. Рассмотрим натуральное число $\overline{fedcba} = f \times 10^5 + e \times 10^4 + d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10^1 + a$. Мы просто расписали шестизначное натуральное число в том виде, который подразумевается при десятичной записи. Рассмотрим с чем сравнимо это число по модулю 11: Поскольку $10 \equiv -1 \pmod{11}$, можно записать:

$$f \times 10^5 + e \times 10^4 + d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \equiv_{11} f \times (-1)^5 + e \times (-1)^4 + d \times (-1)^3 + c \times (-1)^2 + b \times (-1)^1 + a \\ \equiv_{11} -f + e - d + c - b + a$$

Аналогично доказываются признаки равноостаточности по модулям 3 и 9, использующие тот факт, что $10 \equiv 1 \pmod{9}$ и $10 \equiv 1 \pmod{3}$

- Инокентий 2021 раз подряд выписал число 2021. Получилось $\underbrace{20212021 \dots 20212021}_{2021 \text{ раз}}$.
 - Найдите остаток полученного числа при делении на 9.
 - Найдите остаток полученного числа при делении на 11.
- Сумма цифр числа a равна 13, сумма цифр числа b равна 29.
 - Найдите остатки от деления числа $c = 31a^3 + 22b^5$ на 3 и на 9.
 - Может ли c быть полным квадратом?
- Запись натурального числа n состоит из 10 единиц и 10 двоек (в некотором порядке).
 - Может ли число $n+6$ быть простым?
 - Может ли $n+8$ быть полным квадратом?
- Фокусник показывает такой фокус. «1)Загадайте любое число. 2)Умножьте его на 1000. 3)Отнимите от результата исходное число. 4)Найдите сумму цифр того, что получилось. 5) Повторяйте четвёртый пункт инструкции, пока не получите однозначное число.» После этого фокусник угадывает получившееся однозначное число. Как он это делает?
- Иероним утверждает, что он взял число, делящееся на 3, вставил куда-то в его десятичную запись две четвёрки и получил квадрат натурального числа. Может ли это быть правдой?
- Число 2 возвели в некоторую степень. Можно ли, переставив цифры получившегося числа, получить какую-нибудь степень числа 6?

7. Существуют ли натуральные числа N такие, что $N^2 - 20142014 = N \cdot S(N)$? (Через $S(N)$ обозначена сумма цифр числа N .)
8. В десятизначном числе все цифры встречаются по разу. Может ли оно делиться на 11?
9. Ваня взял число x и, возведя его в квадрат, получил число a . Потом нашел сумму цифр числа a , возвел эту сумму в квадрат, и получил число b . После этого он нашел сумму цифр числа b , возвел эту сумму в квадрат, и получил число c . Докажите, что $a+b+c$ делится на 3.
10. Записали пятизначное число и все числа, получающиеся перестановками его цифр. У каждого из них нашли остаток при делении на 11. Докажите, что есть остаток, который не встречается среди полученных ни разу.
11. Для каких натуральных n можно найти такие натуральные числа a и b , что сумма цифр каждого из чисел a , b и $a+b$ равна n ?
12. Назовем «издевательством» над числом следующую операцию. Между некоторыми цифрами числа вставляют знаки «+», выполняют все арифметические действия и меняют исходное число на полученный результат. Костя последовательно записал без пробелов все числа от 1 до 2020 и получил число 1234567891011.....20192020. Можно ли из этого числа в результате нескольких последовательных «издевательств» получить число 2020?
13. Докажите, что если сумма цифр четного числа не изменяется при делении на 2, то число делится на 9.