08. Сравнения по модулю. 28 ноября.

Ссылка на теорию (примерно с отметки 59.00.00). https://youtu.be/EJqaZcSX064

Определение. Для обозначения того, что два числа дают одинаковые остатки при делении на какое-то третье число, придумано удобное обозначение. Если a и b дают одинаковые остатки при делении, например, на 7, то пишут :
$a \equiv b \pmod 7$ или иначе: $a \equiv_7 b$. Читается "*а сравнимо с b по модулю 7*".

Числа, дающие одинаковые остатки при делении на m называются *сравнимыми по модулю m*. Если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m то их разность делится на m. Верно и обратное утверждение.
То есть $a \equiv b \pmod m \quad \Leftrightarrow \quad (a-b) \vdots m$.

***Свойства сравнений (действия с остатками)*:**

Пусть $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, k – произвольное целое число, тогда:

1. $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod m$; Доказательство
$$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow (a-b) \vdots m \Rightarrow k(a-b) \vdots m \Leftrightarrow (ka-kb) \vdots m \Leftrightarrow ka \equiv kb \pmod m$$
Обратите внимание, что в одном из переходов вместо равносильности стоит следствие, а значит в другую сторону эта цепочка не работает. То есть делить обе части сравнения по модулю на одно и то же число можно не всегда. Делать это можно только если числа k и m взаимнопросты. Этим сравнения сильно отличаются от равенств. Во многом же другом сравнения по модулю очень похожи на равенства.
2. $a + c \equiv b + d \pmod m$ Чтобы найти остаток суммы, можно сложить остатки слагаемых и посчитать остаток результата.
3. $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$ Чтобы найти остаток произведения двух чисел, можно перемножить их остатки и вычислить остаток результата.
4. $a^k \equiv b^k \pmod m$.

Таким образом, если требуется найти остаток от деления на m любого выражения, содержащего операции сложения, умножения, вычитания и возведения в степень, то можно заменять числа на их остатки от деления на m, или другие удобные числа, сравнимые по модулю m.

1. Составьте таблицы умножения остатков по модулям 3, 4, 5.

2. Найдите остаток от деления числа 2020^{2021}: а) на 2019; б) на 2021.

3. Докажите, что число 1000×1001×1002 ×1003–24 делится а) на 999; б) на 1004.

4. Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел при делении на 3, 4, 5, 7?

5. Докажите, что сумма квадратов трёх нечётных чисел не может быть квадратом целого числа. (Воспользуйтесь результатами предыдущей задачи)

6. Докажите, что если $a^2 + b^2 = c^2$, то: а) хотя бы одно из чисел a, b четно.
б) хотя бы одно из чисел a, b, c делится на 3;
в) хотя бы одно из чисел a, b или c делится на 5.

7. Дано число m и такие целые числа a, b, c, d, e, что числа $a^2–b$, $a^3–c$, $c^5–d$, $b^7–e$ делятся на m. Докажите, что и число $ae–d$ делится на m.

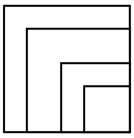
8. Докажите, что а) $2^{100} \equiv 3^{100} (\mathrm{mod}\ 5)$; б) $2^{100} \equiv 3^{100} (\mathrm{mod}\ 13)$; в) по какому ещё простому модулю сравнимы 2^{100} и 3^{100} (найдите хотя бы один)?

9. Докажите, что $n^3 – n$ делится на 24 при любых нечетных n.

10. Докажите, что $n^5 – n$ делится на 15 при любом целом n.

11. Докажите, что если $a^2 + b^2 = c^2$, то abc делится на 60.

12. Длины сторон всех квадратов на рисунке – целые числа. Докажите, что, делая разрезы только по линиям, можно вырезать фигуру, площадь которой кратна 12.



13. Каким наибольшим количеством нулей может заканчиваться число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

14. На доске написано выражение $*n^8 * n^7 * n^6 * n^5 * n^4 * n^3 * n^2 * n$. Петя и Вася по очереди заменяют одну из звёздочек на знак «+» или «–» . Первым ходит Петя. Когда звёздочек не останется, Петя подставляет в получившуюся формулу вместо n любое натуральное число и проводит вычисления. Если результат делится на 30, побеждает Вася, если же не делится, то побеждает Петя. Докажите, что Вася может выиграть независимо от того, как будет действовать Петя.