Долгоиграющий разнобой — продолжение Избранные задачи ЮМТ. Часть 1

5. В каждой клетке квадрата 7×7 стоит число 2. Какое наименьшее количество чисел надо изменить так, чтобы сумма четырёх чисел, стоящих в любом квадрате 2×2, не делилась на 2 и сумма девяти чисел, стоящих в любом квадрате 3×3, не делилась на 3?

6. На некоторых клетках шахматной доски стоят белые и чёрные фишки. У каждой чёрной фишки не менее чем на трёх соседних с ней по стороне клетках стоят белые фишки. Может ли чёрных фишек быть больше, чем белых?

7. У каждого из n^2 правильных треугольников со стороной 1 одна сторона — белая, одна — красная и одна — синяя. Разрешается прикладывать треугольники друг другу либо белыми сторонами, либо совмещать красную с синей. Из треугольников сложили большой треугольник со стороной n. Докажите, что на его границе белых, синих и красных отрезков поровну.

8. Есть три кучи по 100 камней. Играют двое, ходят по очереди. За один ход можно взять камень из любой кучи, кроме той, из которой перед этим взял камень противник. Выигрывает тот, кто не может сделать хода. У кого из игроков (первого или второго) есть выигрышная стратегия?

9. Натуральное число $n > 1$ и простое число p таковы, что $p - 1$ кратно n, а $n^2 - 1$ кратно p. Докажите, что одно из чисел $p - n, p + n$ вляется точным квадратом.