04 Число сочетаний

Количество различных команд размера k, которые можно набрать из n человек можно вычислить используя формулу для числа сочетаний из n по k: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Числа C_n^k играют важную роль в самых разных областях математики. Они обладают большим количеством различных свойств и для них можно доказать множество тождеств. При этом тождества можно доказывать как алгебраически (используя формулу), так и комбинаторно (вычисляя количество вариантов выбора в какой-то ситуации двумя разными способами).

Продемонстрируем эти два способа на доказательстве тождества $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

1) Алгебраический способ:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Приведём эти две дроби к общему знаменателю. Для этого домножим числитель и знаменатель первой из них на k, а второй – на $(n–k)$. Получим:

$$\frac{k\cdot n!}{k\cdot(n-k+1)!\cdot(k-1)!} + \frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\cdot k!} = \frac{k\cdot n! + (n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)!k!} = \frac{n!(k+n-k+1)}{(n-k+1)!k!} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$

. Последнее выражение как раз и равно C_{n+1}^k.

2) Комбинаторный способ. Попробуем представить себе ситуацию некоторого выбора, который можно осуществить по-разному. Левая часть формулы – это, например, количество способов выбрать команду в k человек из класса, в котором учится n+1 человек. Попробуем так же интерпретировать правую часть. Пусть в классе учится Таня. Тогда все возможные команды разбиваются на две группы: команды, куда Таня вошла, и команды, куда её не взяли. Посчитаем их отдельно. Если Таня вошла в команду, то там осталось k–1 свободное место, на которое претендуют n человек. То есть таких команд C_n^{k-1}. Если Таня не вошла в команду, то нужно заполнить все k мест, а претендентов n. Тогда таких команд C_n^k. Сумма двух этих чисел и даст количество всех возможных команд.

Задачи

1. Докажите а) алгебраически; б) комбинаторно; , что $C_n^k = C_n^{n-k}$

2. Докажите а) алгебраически; б) комбинаторно; , что $C_m^k C_{m-k}^n = C_m^n C_{m-n}^k$.

3. а) Докажите алгебраически, что $n\cdot C_{n-1}^{k-1} = k\cdot C_n^k$.

б) Докажите эту же формулу комбинаторно. (Рассмотрите ситуацию, когда нужно выбрать для матбоя команду из k человек, один из которых будет капитаном.)

4. Имеется *n* выключателей, каждый зажигает свою лампочку.
Сколькими способами можно осветить комнату этими лампочками? Посчитайте это число двумя способами и найдите сумму: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$

5. Докажите комбинаторно, что $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \ldots 3^n C_n^n = 4^n$. Попробуйте представить себе некоторую ситуацию выбора, которая могла бы описываться как формулой, представленной слева, так и формулой в левой части тождества. Справа стоит, например, количество способов раздать *n* различных конфет Ане, Боре, Васе и Коле.

6. Докажите комбинаторно:
а) $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^k C_n^{n-k} + \ldots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n$
б) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

7. Найдите сумму: $C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^{k-1} + \ldots + C_n^1 + C_{n-1}^0$

8. Сколько существует десятизначных чисел, записываемых различными цифрами, в записи которых все четные цифры идут в порядке возрастания?

9. На доске выписаны все возможные девятизначные числа начинающиеся с 9, в которых каждая следующая цифра либо совпадает с предыдущей, либо меньше нее на 1. Какое количество записанных чисел заканчиваются на 3?

10. Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии. На сейф можно повесить сколько угодно замков, от каждого из которых есть сколько угодно ключей. Ключи от каждого из замков можно раздать нескольким членам комиссии. Нужно, чтобы любые 6 членов комиссии, собравшись вместе, могли открыть сейф, но ни у каких пятерых не было бы необходимого для этого набора ключей. Какое наименьшее количество замков необходимо для этого?