

02 Простые числа

Сколько всего простых чисел?

1. Имеются несколько простых чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Постройте натуральное число, которое не делится ни на одно из этих чисел. (Воспользуйтесь тем, что для натуральных n и m число $mn+1$ не делится на n .) Можно ли утверждать, что построенное вами число простое?

2. Докажите, что последовательность простых чисел бесконечна.

Мы показали, что последовательность простых чисел бесконечна, однако наше доказательство неконструктивно. То есть оно не позволяет найти следующее (или вообще хоть какое-нибудь) простое число, зная последовательность предыдущих. Свойство, которое мы докажем в следующей задаче, позволяет строить большие простые числа.

3. а) Имеются три натуральных числа n, m, k . Докажите, что, если $k \vdots n$ и $k \nmid m$, то $n \nmid m$
б) Докажите, что если $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) + 1$ делится на n , то n – простое число.

В ряду простых чисел могут быть сколь угодно большие пробелы

4. а) Вася нашёл такое число n , что $n+2$ делится на 2, а $n+3$ делится на 3. Сколько таких n среди натуральных чисел меньших 100?
б) Докажите, что существует такое натуральное число n , что: $n+2$ делится на 2, $n+3$ делится на 3, $n+4$ делится на 4, , $n+10$ делится на 10.
5. Докажите, что в ряду натуральных чисел встречается подряд миллион составных чисел.

Делители простые и непростые

6. а) Простые числа имеют ровно 2 различных делителя. А какие числа имеют ровно 3 делителя?
б) У каких чисел количество различных делителей нечетно?
7. Сколько различных натуральных делителей у числа а) p^a б) $p_1 p_2 \dots p_k$ в) $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, где p_i – различные простые числа?
8. Найдите все числа меньшие 1000, которые имеют ровно 7 различных делителей.
9. Тюремщик Джон Фридом, осуществляя частичную амнистию, поступил следующим образом. Сначала он открыл все камеры. Затем запер каждую вторую камеру. На третьем этапе он повернул ключ в замке каждой третьей камеры (открыл запертые и запер открытые). Продолжая действовать таким образом, на n -м этапе он поворачивал ключ в замке каждой n -й камеры. Повернув на сотом этапе только ключ в замке последней сотой камеры, он выпустил всех заключенных, которые оказались в открытых камерах. Укажите номера камер, в которых сидели счастливчики.

10. В таблицу 5×5 записали различные натуральные числа от 1 до 25 так, что любые два числа, отличающиеся на единицу, стоят в соседних по стороне клетках. Какое наибольшее количество простых чисел может стоять в одном столбце?
11. Дано простое число p и такие целые числа a, b, c, d, e , что числа $a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e$ делятся на p . Докажите, что и число $ae-d$ делится на p .
12. а) Семья Бубкиных отмечала Новый год большой компанией. Неожиданно Вася обнаружил, что если любой из присутствующих уйдет, то оставшиеся смогут разбиться на две группы так, что сумма числа полных лет членов первой группы будет равна сумме числа полных лет членов второй группы. Докажите, что животных, в годы которых родились участники вечеринки по Восточному календарю, – не больше шести. (В восточном календаре каждый год присвоен одному из 12 животных, которые сменяются по кругу).
- б) На дне рождения Тани ее старший брат – сорокалетний Вася обнаружил, что если любой из присутствующих уйдет, то оставшиеся смогут разбиться на две группы так, что сумма числа полных лет членов первой группы будет равна сумме числа полных лет членов второй группы. Сколько лет исполнилось Тане?
13. Числа 3, 7, 11, 17, ..., 43, ... имеют вид $(4n-1)$ для некоторого натурального n . Докажите, что простых чисел вида $(4n-1)$ бесконечно много. (Подсказка: произведение двух чисел вида $(4n+1)$ даёт число того же вида.)