

Деревья. Теория

Определение 1: *Путь* в графе (без петель и кратных рёбер) — последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром.

Определение 2: *Простой путь* — путь, все вершины которого попарно различны (далее в листочке мы будем говорить только о простых путях, если не оговорено обратное).

Определение 3: Граф называется *связным*, если между любыми его двумя вершинами существует путь.

Определение 4: *Цикл (простой)* — связный граф, степень каждой вершины которого ровно 2.

Определение 5: *Циклический граф* — граф, в котором есть цикл.

Эквивалентное определение цикла: Граф является простым циклом тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами существует ровно два простых пути.

Определение 6: *Дерево* — связный граф без циклов.

Эквивалентные определения дерева:

1) Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одним простым путём.

2) Связный граф на n вершинах является деревом тогда и только тогда, когда у него $n - 1$ ребро.

3) Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда при удалении любого ребра он становится несвязным.

Свойства деревьев:

1) В дереве есть не меньше двух вершин степени один (такие вершины называются висячими).

2) Из любого связного циклического графа, не являющегося деревом, можно удалить некоторое количество ребер так, что оставшийся граф будет деревом. Такое дерево называется *остовным деревом* графа или *остовом*, или даже *скелетом* графа.

Задачи

1. Существует ли дерево, в котором все вершины имеют одинаковую степень? Сколько вершин может быть в таком дереве? Приведите все варианты.
2. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нём есть цикл.
3. В Хорохоровке 444 деревни. Между некоторыми из них проложены дороги. Известно, что из каждой деревни можно попасть в любую другую, притом по единственному маршруту. Сколько дорог в Хорохоровке?
4. В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой?
5. В старой усадьбе 6 беседок, которые соединяются тропинками. Известно, что, выйдя из любой беседки, вернуться в неё можно только пройдя дважды хотя бы по одной тропинке. Сколько тропинок в усадьбе?
6. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
7. В марианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдётся.
- 8*. Выбежав после уроков во двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что школьники из одной команды друг в друга снежками не кидали.