

Добавка к алгоритму Евклида.

1. Числа Фибоначчи — последовательность натуральных чисел, которая задаётся соотношением:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

- (a) Докажите, что любые два соседних числа в этой последовательности взаимно простые. (b) Докажите, что $\text{НОД}(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.
2. На доске пишутся две единицы. Вторым шагом посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее (a) 19 раз. Сколько раз будет написано число 19? (b) 2021 раз. Сколько раз будет написано число 2021?
3. Даны два натуральных взаимно простых числа p и q . Целое число n называется хорошим, если его можно представить в виде $n = px + qy$, где x и y — целые неотрицательные числа, и плохим — в противном случае. (a) Доказать, что существует такое число s , что из двух чисел s и $s - n$ всегда одно хорошее, а другое плохое. (b) Сколько всего плохих неотрицательных чисел.