10 Дискретная непрерывность. 17 апреля.

- Петя и Вася договорились встретиться под яблоней и открыть закон Ньютона. Петя опоздал, и ко времени его прихода Васе на голову уже упало 5 яблок. Однако первым закон Ньютона открыл Петя. (Закон открывается человеку после падения на его голову двадцатого яблока.) Докажите, что был момент, когда количества шишек от упавших яблок на головах Васи и Пети были равны, если известно, что яблоки падают только по одному.
- На плоскости отмечено 100 красных точек. а) Всегда ли можно провести прямую, с каждой стороны от которой находится ровно 50 точек? б) Прокопий отметил на этой же плоскости зеленую точку, не лежащую на одной прямой ни с какими двумя красными. Можно ли провести через зелёную точку прямую, по обе стороны от которой находится ровно по 50 красных?

Пусть имеется определённый процесс и существует некоторая величина, которая принимает целые значения и способна изменяться скачками длины не более, чем 1. Если мы знаем, что существовал момент, когда эта величина была меньше числа X, а после этого существовал момент, когда эта величина была больше числа X, то можно с уверенностью утверждать, что существовал момент, когда эта величина была равна нулю.
Если же в процессе некоторая величина изменяется скачками не более, чем L, то на любом отрезке длины L, расположенном на числовой прямой между исходным значением и конечным, найдётся значение, которое эта величина принимала.

1. Яна и Аня играют в «Камень, ножницы, бумагу» на шоколадки. Проигравший отдает одну шоколадку выигравшему. Сначала у Яны было больше шоколадок, чем у Ани, а в конце она проиграла их все. Докажите, что был момент, когда количество шоколадок у Яны и Ани отличалось не больше, чем на 1. Можно ли утверждать, что в какой-то момент у девочек было равное количество шоколадок?

2. На уроке физкультуры выстроились в ряд 19 семиклассников, среди которых 6 девочек, причем крайними справа стоят 4 девочки. Докажите, что:
а) Учитель физкультуры может выбрать несколько крайних справа школьников так, что среди них будет поровну мальчиков и девочек.
б) Можно выбрать пять стоящих подряд учеников, среди которых мальчиков на одного больше, чем девочек.
в) Дети встали в каком-то другом порядке. Докажите, что всё равно можно выбрать шесть стоящих подряд учеников, среди которых ровно две девочки.

3. Олег ежедневно получает не менее 9 писем и не более 10 смсок. За январь прошлого года писем пришло больше, чем смс, а за весь прошлый год в целом - наоборот. Докажите, что в прошлом году был день, в конце которого в количества писем и смс, пришедших с начала года, совпадали.

4. В ряд стоят 30 школьников (девочек и мальчиков поровну). Докажите, что найдутся 10 стоящих подряд учеников, среди которых девочек и мальчиков будет поровну.

5. Докажите, что в любом стозначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трех первых и трех последних цифр находилась в промежутке от 0 до 9.

6. Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2\times2\times2$, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

7. В зале находится n юношей и n девушек. Докажите, что всегда можно провести по полу прямую черту так, чтобы количество юношей с одной стороны от черты равнялось количеству девушек с другой стороны от этой черты.

8. За круглым столом сидит четное количество гномов в колпаках с помпонами, причем у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих друг напротив друга, у которых количество помпонов отличается не больше, чем на 1.

9. В некоторых клетках квадрата 10×10 стоят $+1$ и -1, причем сумма всех чисел не больше 20 и не меньше -20. Докажите, что есть квадрат 5×5, модуль суммы чисел в котором не превосходит 5.

10. В ряду из 100000 натуральных чисел первое число однозначно, а каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в ряду есть число, начинающееся цифрами 2021.