11 Малая Теорема Ферма. 06 апреля

Т1. Если $ax \equiv ay \pmod{m}$, и числа a и m взаимно просты, то $x \equiv y \pmod{m}$

Т2. Рассмотрим таблицу умножения ненулевых остатков по некоторому простому модулю p. Докажите, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы умножения остатков все числа различны, то есть каждая строка таблицы содержит все ненулевые остатки, переставленные в другом порядке.

Т3. а) Докажите, что если p – простое число, и a не делится на p, то $a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p-1)a \equiv (p-1)! \pmod{p}$.

б)(**Малая теорема Ферма**). Докажите, что если p – простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

1. Найдите остаток от деления: а) 2^{100} на 101; б) 7^{102} на 101.

2. В десятичной записи трехзначного числа a все цифры различны. Докажите, что $a^{100} \equiv 1 \pmod{101}$

3. Докажите, что если n – натуральное число, не кратное 17, то одно из чисел n^8+1, n^4+1, n^2+1, $n+1$, $n-1$ делится на 17.

4. p, q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

5. а) Докажите, что $17^{120} - 1$ делится на 143; б)Докажите, что $3^{3000} - 1$ делится на 1001

6. Математические хулиганы Гриша и Вова катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером n $(n \neq 17)$ и едут на этаж, номер которого равен остатку от деления n^2 на 17 (это их первая поездка). После этого они умножают на n номер этажа, на котором оказались, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления на 17 полученного произведения. На каком этаже может закончиться пятнадцатая поездка? А на каком этаже может закончиться седьмая?

7. Вове и Грише надоело вспоминать, с какого этажа они начали путешествие, и теперь они просто возводят в квадрат номер этажа, на котором находятся, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления результата на 17. Какое максимальное количество поездок удастся им совершить таким способом?

8. Пусть p – простое число большее 5. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots111}_{p-1}$($p$–1 единица) делится на p.

9. Преподаватель физкультуры собирается провести зарядку для 47 детей следующим образом. Он даст команду сделать шаг вперед первым 23 школьникам, а затем разместит их между последними 24: первого поставит между 24 и 25, второго – между 25 и 26, третьего – между 26 и 27, и так далее. С получившимся строем он произведёт ту же операцию. Докажите, что после 46-го перестроения дети выстроятся в первоначальном порядке.

10.(*Теорема Жирара.*) Докажите, что если число $a^2 + b^2$ (a, b – целые) делится на простое число вида $4k - 1$, то a и b также делятся на это простое число