16 Метод математической индукции. 06 марта.

т1. Докажите, что доску a) 4×4; b) 8×8; c) 16×16; d) $2^n \times 2^n$ с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на уголки из трех клеток при любом натуральном n.

т2. На плоскости построено несколько окружностей. Докажите, что области, на которые они разбили плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая область была полностью покрашена в один из двух цветов, и две одинаково окрашенные области соприкасались не более, чем в одной точке.

т3. Имеется пирамида с *n* кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что: а) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней; б) это можно сделать за $2^n - 1$ перекладывание.

т4. На кольцевом шоссе стоят несколько автомобилей с общим запасом бензина, достаточным, чтобы объехать весь круг. Докажите, что можно сесть в один из автомобилей и проехать все шоссе, забирая по дороге бензин у остальных автомобилей.

Проследим за логикой наших рассуждений. Сначала мы решаем совсем простую задачу. Затем, получив ее решение, замечаем, что при решении следующей задачи мы можем воспользоваться уже полученным результатом. Далее, как снежный ком – при решении третьей задачи пользуемся результатами второй и так можно продолжать до бесконечности. Ясно, что, двигаясь таким образом по цепочке, мы дойдем до каждого из ее утверждений, значит все они верны. Доказали одно, оно влечет за собой доказательство следующего, следующее – дальше и т.д.

Итак, ***метод математической индукции*** состоит в следующем.

1) Формулируем некоторое утверждение, которое требуется доказать для произвольного натурального *n.* На самом деле, это означает, что мы хотим доказать последовательность утверждений: $У_1$, $У_2$, ..., $У_n$, ...Чтобы доказать справедливость всех утверждений этой последовательности, действуем так.

2) (*Индукционный переход*) Доказываем, что при любом натуральном *k* из справедливости утверждения $У_k$ следует справедливость утверждения $У_{k+1}$ То есть для доказательства утверждения $У_{k+1}$ мы пользуемся *предположением,* что утверждение $У_k$ уже доказано.

3) (*База индукции*) Если теперь удастся доказать наше утверждение для какого-нибудь одного значения *n*, то это будет означать, что оно доказано и для всех значений *n*, которые больше данного. Действительно, если после доказательства индукционного перехода, доказать например $У_5$, то из него следует $У_6$, из него – $У_7$ и так далее вплоть до любого $У_n$, где n > 5.

1. Строители строят одноэтажный дом из бетонных плит, окрашенных с одной стороны в синий цвет, а с другой – в желтый. Сначала возводятся наружные стены, а затем по одной ставятся перегородки так, что каждая новая перегородка закрепляется концами к уже существующим стенам или перегородкам. Снаружи дом синий. Докажите, что в нем есть хотя бы одна полностью желтая комната.

2. Докажите, что для любого натурального $n > 3$, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно 3 острых угла.

3. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит робот. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь робот покинет лестницу.

4. Город Круглый окружен кольцевой автодорогой с односторонним движением. Все улицы города начинаются и заканчиваются на кольцевой автодороге, и движение по каждой из улиц также одностороннее. Докажите, что среди кварталов, на которые улицы разбивают город, есть квартал, который можно объехать по периметру, не нарушая правил движения.

5. На доске написано число 1. Сережа приписал к нему справа число 3, потом число 7 и так далее, придерживаясь следующего правила. Для того, чтобы получить очередное число, он умножает предыдущее на 2 и прибавляет 1. Докажите, что на n – ом месте будет стоять число $2^n - 1$.

6. На столе стоят 512 стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно уравнять количество воды в стаканах.

7. Простые числа, начиная с числа 5, пронумеровали. Число 5 получило номер 1, число 7 – номер 2 и так далее. Докажите, что каждое число больше своего утроенного номера.

8. В трех бочках содержится в сумме 1024 литра воды, причем в каждой – целое число литров. Разрешается выбрать две бочки и перелить из одной в другую столько воды, сколько там уже есть. Докажите, что можно собрать всю воду в одной бочке (если бочки достаточно большие).

9. Соревнования по n видам спорта между 2^n участниками проводятся по следующим правилам. После состязаний по первому виду спорта выбывают половина спортсменов, показавшие худшие результаты. Остальные соревнуются по второму виду и снова выбывает половина и т. д. Победивший в последнем виде становится чемпионом. Для каждого спортсмена известна его сила в данном виде программы. Назовем спортсмена *возможным победителем,* если можно так переставить виды спорта в программе, что он станет чемпионом. Докажите, что существует распределение сил спортсменов в разных видах такое, что возможными победителями являются не менее половины участников.

10. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били.