

Двудольные графы

Решение каждой сдаваемой задачи должно быть полностью записано в тетради.

1. В спортивной школе есть секция шахмат и секция настольного тенниса (других секций нет). Каждый шахматист дружит с 3 теннисистами, а каждый теннисист с 5 шахматистами. Сколько учеников в спортивной школе, если известно, что шахматистов больше 10, а теннисистов меньше 10?
2. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с четырьмя мальчиками. 17 из них любят играть в матбой, и в классе 13 столов (за столом сидит 1 или 2 человека). Сколько всего ребят в классе?
3. В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают Карабасы и Барабасы. Каждый Карабас знаком с шестью Карабасами и девятью Барабасами. Каждый Барабас знаком с десятью Карабасами и семью Барабасами. Кого в этой стране больше — Карабасов или Барабасов?
4. В двудольном графе все вершины первой доли пронумерованы от 1 до 100. Вершина номер 1 соединена ровно с 1 вершиной второй доли, вершина номер 2 — ровно с 2 вершинами второй доли, ..., вершина номер 100 — ровно с 100 вершинами второй доли. Все вершины второй доли соединены с одинаковым количеством вершин первой доли. Докажите, что во второй доле больше вершин, чем в первой.
5. В школе проходило спортивное троеборье. В каждой из трёх дисциплин участвовало нечётное число семиклассников. При этом, каждый участник, который пришёл на троеборье, участвовал или в одной дисциплине, или во всех трёх. Докажите, что хотя бы один семиклассник не пришёл на троеборье, если известно, что в этой параллели школы учится 80 человек.
6. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

- Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?
7. Страна состоит из больших и малых городов. Каждый город (и малый, и большой) соединён дорогами с тремя малыми городами и с тремя большими городами. Докажите, что общее число городов в стране делится на 4.