

Снова графы

1. В государстве 99 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве? Может ли из каждого города выходить 3 дороги?
2. Граф состоит из 15 вершин. Могло ли так оказаться, что в этом графе одна вершина степени 1, две вершины степени 2, три вершины степени 3, четыре вершины степени 4 и пять вершин степени 5?
3. Каждый сплетник за вечер разговаривает с семью другими сплетника (каждый разговор проходит один на один). Могло ли за вечер состояться 100 разговоров?
4. Во время шахматного турнира каждый игрок сыграл 3, 5 или 9 партий. Докажите, что число игроков чётно.
5. У марсиан бывает только нечетное число рук. Однажды все марсиане взяли за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан четно.
6. На занятие кружка пришли 24 школьника, среди них отличник Леша. Руководитель спросил у каждого из них, кроме Леша, сколько у них знакомых среди остальных пришедших. В ответ прозвучали только числа 3 и 5. Докажите, что Леша с кем-нибудь знаком.
7. В стране несколько мегаполисов (из которых выходит по 43 дороги) и несколько провинциальных городов (из которых выходит по 4 дороги). Докажите, что из любого мегаполиса можно проехать в некоторый другой мегаполис.