

Метод от противного. Принцип Дирихле.

0. В этой теме каждую задачу вам нужно решить двумя способами. Таким образом во всех задачах два пункта:
(а) доказать с помощью метода от противного;
(б) доказать с помощью принципа Дирихле.
1. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.
2. В школе 1500 учащихся. Найдется ли такой день в году, в который отмечают свой день рождения не меньше, чем 5 учеников?
3. Пусть в классе 41 человек. Некто сделал в контрольной работе больше всех ошибок — 13. Докажите, что найдутся 4 учащихся, сделавших одинаковое число ошибок.
4. Все точки плоскости покрашены в один из двух цветов. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, окрашенные одинаково.
5. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест. Группа из 50 человек сходил на утренний и вечерний сеансы. Докажите, что найдутся два человека, которые и утром, и вечером сидели на одном ряду.
6. Докажите, что в аудитории найдутся 2 человека, у которых одинаковое количество друзей среди присутствующих (дружба бывает только взаимной).
7. Докажите, что из любых $n + 1$ целых чисел можно выбрать два числа, разность которых нацело делится на n .
8. В магазине посуды продаются 20 чашек по цене от 500 до 800 рублей и 20 блюдец по цене от 50 до 140 рублей. Известно, что любой один предмет стоит целое число рублей и никакие два не стоят одинаково. Докажите, что два покупателя смогут приобрести по одной чашке с блюдцем, потратив одинаковое количество денег.