

## Инвариант. Делимость и не только. Вступление.

1. У Змея Горыныча 12345 голов. Илья Муромец может совершать следующие действия: отрубить 7 голов — но тогда у Змея Горыныча сразу вырастет 4 новых; либо отрубить 2 головы — тогда у Змея Горыныча вырастет 8 новых. Сможет ли Илья Муромец отрубить все головы?
2. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
3. В ряд стоят шесть елок на расстоянии 10 м друг от друга. На каждой елке сидит по одному чижу. Чижи перелетают с елки на елку; причем каждый раз, когда один чиж перелетает вправо на некоторое расстояние, другой чиж перелетает влево на такое же расстояние. Могут ли чижи собраться на одной елке?
4. **(а)** Дан клетчатый квадрат  $4 \times 4$ , в которой одна угловая клетка белая, а все остальные черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый?  
**(б)** Условие то же, что и в предыдущей задаче, но изначально в белый покрашены четыре клетки на одной из диагоналей. Можно ли перекрасить все клетки квадрата в белый?  
**(с)** Условие то же, что и в предыдущей задаче, но клетки раскрашены так, что в каждом квадратике  $2 \times 2$  четное число белых клеток. Можно ли перекрасить все клетки квадрата в белый?