

## Инвариант. Делимость и не только.

### Несколько задач про делимость.

1. Каждый раз, когда европейцы без предупреждения стреляют из пушки, турки отвечают шестью выстрелами. А каждый раз когда турки стреляют без предупреждения, европейцы отвечают тринадцатью выстрелами. Сидя в окопе, барон Мюнхгаузен насчитал ровно 1000 пролетевших над ним ядер. Докажите, что хвастливый барон ошибся.
2. Есть 2 ведра объёмами 15 и 9 литров, а также источник воды. Можно ли с их помощью отмерить ровно 4 литра воды?
3. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинаящий финансист имеет 1 диллер и может свободно перезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

### Разные задачи про инварианты.

4. На доске написаны числа  $1, 2, \dots, 21$ . За одну операцию разрешается стереть два числа  $a$  и  $b$  и вместо них записать на доску число  $a + b - 1$ . Какое число может быть записано на доске после применения 20 операций?
5. Дана белая доска  $10 \times 10$ . За один ход разрешается выбрать квадрат  $6$  на  $6$  и перекрасить в нём все белые клетки в чётный, а все чёрные клетки — в белый. Можно ли покрасить доску в шахматном порядке?
6. Около школы №444 из снега выложено три числа 111, 222 и 333. Каждую минуту Аня заменяет
  - (а) имеющиеся три числа  $a, b, c$  на числа  $\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}$ ;
  - (б) произвольные два числа  $a$  и  $b$  на  $\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}$ .Могут ли получиться числа 1111, 2222, 3333?
7. В языке Древнего Племена алфавит состоит всего из двух букв: «М» и «О». Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления буквосочетаний «МО» и «ОММ», повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Племена слова «ОММ» и «МОО»?
8. Есть три кучки камней: в первой — 51 камень, во второй — 49 камней, в третьей — 5 камней. За один ход разрешается либо соединить две кучки, либо разделить кучку на две равных. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?