

Принцип крайнего

1. Имеется 11 гирек массой 1, 2, ..., 11 граммов. Пять из них — бронзовые, пять — серебряные и одна золотая. Все бронзовые вместе имеют массу на 30 меньшую, чем все серебряные. Какую массу имеет золотая гирька?
2. На выпуск из Хогвартса Дамблдор подарил семи лучшим выпускникам семь шляп разной высоты и семь мантий разной длины. Если выпускник видит, что у него и шляпа выше, и мантия длиннее, он начинает громко кричать: «Ехрето patronum!» Какое наибольшее количество юных магов могут начать выкрикивать заклинание?
3. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.
4. В вершинах 444-угольника расставлены числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все они равны. (Средним арифметическим n чисел называют сумму этих чисел, делённую на n . Например, для двух чисел a и b их среднее арифметическое равно $(a + b) : 2$.)
5. На бесконечной шахматной доске расставлены числа таким образом, что каждое число является средним арифметическим чисел, расположенных в соседних по стороне клетках. Докажите, что все числа равны между собой.
6. На рабочем сервере Тони Старка компьютеры 1, 2, 3, ..., 100 соединены в кольцо (первый со вторым, второй с третьим, ..., сотый с первым). Конкуренты Stark Industries подготовили 100 вирусов, занумеровали их и в разное время в произвольном порядке запускают каждый вирус на компьютер, имеющий тот же номер. Если вирус попадает на незаражённый компьютер, то он заражает его и переходит на следующий в цепи компьютер с большим номером до тех пор, пока не попадёт на уже заражённый компьютер (с компьютера 100 вирус переходит на компьютер 1). Тогда вирус погибает, а этот компьютер восстанавливается. Ни на один компьютер два вируса одновременно не попадают. Сколько компьютеров будет заражено в результате атаки этих 100 вирусов?
7. Все делители натурального числа n выписали в строку в порядке возрастания от 1 до самого n . Оказалось, что предпоследнее число в строке в 101 раз больше второго. Для какого наибольшего n это возможно?