

Постепенное конструирование

1. Лифт в 100-этажном доме имеет 2 кнопки: "+7" и "-9" (первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9). Можно ли проехать:
 - а) с 1-го на 2-й;
 - б) со 2-го на 1-й;
 - в) с любого на любой этаж?
2. Дан алгоритм: от прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, то процесс повторяют. Докажите, что есть прямоугольник, для которого алгоритм закончит работу ровно после 100-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счет).
3. Как отметить на окружности 100500 точек так, чтобы все попарные расстояния между ними были различны?
4. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо 19-значное число из цифр 1 и 2. После выписывания Первым очередной цифры Второй, если хочет, меняет между собой какие-то две цифры из уже написанного ряда. Всегда ли Второй может добиться того, чтобы итоговое число читалось одинаково слева направо и справа налево?
5. Докажите, что для любого n найдутся n различных натуральных чисел, чья сумма делится на каждое из них.
6. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 101 меньший треугольник так, чтобы у них не было сторон на одной прямой, кроме тех, по которым треугольники примыкают друг к другу.
7. а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на 25 треугольников, в каждом из которых есть угол 20 градусов. При этом ничего лишнего остаться не должно!
б) Докажите, что любой треугольник можно разбить на 22 треугольника, в каждом из которых есть угол 22 и ещё 23 треугольника, в каждом из которых есть угол 23 градуса. При этом ничего лишнего остаться не должно!
8. Докажите, что существует число делящееся на 5^{1000} не содержащее в своей записи ни одного нуля.
9. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?
10. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \dots, 100$.
 - а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящие. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
 - б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
 - в) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?

Домашнее задание

11. Первokлассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого $n > 29$ он может написать кратное 7 число с суммой цифр n .

Постепенное конструирование

1. Лифт в 100-этажном доме имеет 2 кнопки: "+7" и "-9" (первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9). Можно ли проехать:
 - а) с 1-го на 2-й;
 - б) со 2-го на 1-й;
 - в) с любого на любой этаж?
2. Дан алгоритм: от прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, то процесс повторяют. Докажите, что есть прямоугольник, для которого алгоритм закончит работу ровно после 100-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счет).
3. Как отметить на окружности 100500 точек так, чтобы все попарные расстояния между ними были различны?
4. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо 19-значное число из цифр 1 и 2. После выписывания Первым очередной цифры Второй, если хочет, меняет между собой какие-то две цифры из уже написанного ряда. Всегда ли Второй может добиться того, чтобы итоговое число читалось одинаково слева направо и справа налево?
5. Докажите, что для любого n найдутся n различных натуральных чисел, чья сумма делится на каждое из них.
6. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 101 меньший треугольник так, чтобы у них не было сторон на одной прямой, кроме тех, по которым треугольники примыкают друг к другу.
7. а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на 25 треугольников, в каждом из которых есть угол 20 градусов. При этом ничего лишнего остаться не должно!
б) Докажите, что любой треугольник можно разбить на 22 треугольника, в каждом из которых есть угол 22 и ещё 23 треугольника, в каждом из которых есть угол 23 градуса. При этом ничего лишнего остаться не должно!
8. Докажите, что существует число делящееся на 5^{1000} не содержащее в своей записи ни одного нуля.
9. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?
10. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \dots, 100$.
 - а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящие. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
 - б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
 - в) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?

Домашнее задание

11. Первokлассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого $n > 29$ он может написать кратное 7 число с суммой цифр n .