Инварианты

0. а) На листке написаны целые числа от 1 до 10. Можно стереть любые два числа и и записать вместо них их сумму. В конце осталось одно число. Какое?
   б) Тот же вопрос, если вместо суммы можно записать произведение.

1. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?

2. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа (1, 3) (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

3. Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b и стереть их. А на их месте написать числа
   а) $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$;
   б) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$.
   Можно ли такими операциями получить числа 7, 8, 9?

4. Можно ли операциями “прибавить 4” и “умножить на 5”, получить из числа 3 число 2021?

5. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?

6. 100 фишек выставлены в ряд.
   а) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?
   б) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?

7. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

8. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если $a \geq b$, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?

9. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый,если
   а) n чётно ;
   б) n нечётно и $n > 1$;
   в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

Инварианты

0. а) На листке написаны целые числа от 1 до 10. Можно стереть любые два числа и и записать вместо них их сумму. В конце осталось одно число. Какое?
   б) Тот же вопрос, если вместо суммы можно записать произведение.

1. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?

2. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа (1, 3) (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

3. Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b и стереть их. А на их месте написать числа
   а) $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$;
   б) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$.
   Можно ли такими операциями получить числа 7, 8, 9?

4. Можно ли операциями “прибавить 4” и “умножить на 5”, получить из числа 3 число 2021?

5. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?

6. 100 фишек выставлены в ряд.
   а) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?
   б) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?

7. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

8. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если $a \geq b$, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?

9. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый,если
   а) n чётно ;
   б) n нечётно и $n > 1$;
   в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

Инварианты. Добавка

1. На доске по кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Ежеминутно между каждой парой соседних чисел записывают их сумму, после чего все имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны на доске спустя час?

2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?

Инварианты. Добавка

1. На доске по кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Ежеминутно между каждой парой соседних чисел записывают их сумму, после чего все имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны на доске спустя час?

2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?

Инварианты. Добавка

1. На доске по кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Ежеминутно между каждой парой соседних чисел записывают их сумму, после чего все имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны на доске спустя час?

2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?

Инварианты. Добавка

1. На доске по кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Ежеминутно между каждой парой соседних чисел записывают их сумму, после чего все имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны на доске спустя час?

2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?

Инварианты. Добавка

1. На доске по кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Ежеминутно между каждой парой соседних чисел записывают их сумму, после чего все имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны на доске спустя час?

2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?

Инварианты. Добавка

1. На доске по кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Ежеминутно между каждой парой соседних чисел записывают их сумму, после чего все имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны на доске спустя час?

2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после 99 таких операций?