Индукция. Верно или нет?

В каждой из написанных задач нужно понять верное это рассуждение или нет и найти ошибку в рассуждении, если оно неверно.

1. Утверждение. При любом натуральном n числа n и $n+1$ равны. Доказательство. Предположим, что утверждение верно для $n = k$, то есть $k = k+1$. Прибавляя к обеим частям этого равенства единицу, получаем, что $k+1 = k+2$. Рассуждая так дальше, получаем, что все числа равны.

2. Докажем, что все лошади одной масти.
Индукция по количеству лошадей в подмножестве. База индукции. Любая лошадь одной масти – верно. Индукционный переход. Пусть доказано для k лошадей. Т.е. доказано, что любые k лошадей одной масти. Рассмотрим $(k+1)$-ю лошадь. Если из этого множества лошадей увести одну лошадь (любую!), то их останется ровно k. По индукционному предположению они все одной масти. Заменим одну из оставшихся лошадей на уведенную ранее. Тогда снова имеем ровно k лошадей одной масти. Следовательно, все $k+1$ лошадей одной масти. Тем самым утверждение доказано.

3. На доске написаны два числа 1,1. Вписав между числами их сумму, мы получим числа 1,2,1. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа 1,3,2,3,1. После трёх операций будут числа 1,4,3,5,2,5,3,4,1. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?
Решение. Ясно, что для выполнения 100 операций нам не хватит ни места, ни времени. Значит, нужно пытаться найти какую-то общую формулу для суммы чисел после n операций (обозначим её S_n). Посмотрим на таблицу:

n	S_n
0	2
1	4
2	10
3	28
4	82

Хочется сделать предположение, что сумма после n операций равна $S_n = 3^n + 1$. Базой будет служить таблица. Шаг индукции. Пусть $S_{n-1} = 3^{n-1} + 1$, найдем S_n. Каждое старое число (кроме двух крайних единиц) входит теперь в новую сумму три раза, поэтому новая сумма равна $S_n = 3S_{n-1} - 2 = 3^n + 3 - 2 = 3^n + 1$ (мы вычли 2, чтобы учесть недостающие единицы). Наша формула доказана. Из неё видно, что после ста операций сумма всех чисел на доске (хотя, честно говоря, они уже вряд ли поместятся на доске) будет равна $3^{100} + 1$.

4. Утверждение. В любом графе с $n > 2$ вершинами и n рёбрами обязательно есть три вершины, попарно соединённые рёбрами.
Доказательство. При $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что в графе с $k > 3$ вершинами и k рёбрами обязательно есть три вершины, попарно соединённые рёбрами. Добавим ещё одну вершину и соединим ребром две несоединёные ранее вершины. Получим граф с $k+1$ вершинами и $k+1$ рёбрами и в нём есть три вершины попарно соединённые рёбрами.

5. Утверждение. Хотя бы одно из чисел Фибоначчи F_n и F_{n+1} не делится на 7.
Доказательство. При $n = 1$ очевидно. Шаг индукции: если это не так и оба числа F_n и F_{n+1} делятся на 7, то и предыдущее число $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ делится на 7, что противоречит предположению индукции.

6. Утверждение. Если $max(a,b) = n$, где a и b натуральные, то $a = b$.
Доказательство. При $n = 1$: если $max(a,b) = 1$, то $a = b = 1$. Предположим, что если $max(a,b) = k$, то $a = b$. Пусть теперь $max(a,b) = k+1$. Тогда $max(a-1, b-1) = k$, значит, $a-1 = b-1$. Следовательно, $a = b$, что и требовалось доказать.

7. Утверждение. Любые n точек лежат на одной прямой.
Доказательство. При $n = 1$ это ясно. Предположим, что любые k точек лежат на одной прямой и докажем, что любые $k+1$ точек лежат на одной прямой. Рассмотрим произвольные $k+1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$. Отбросим последнюю точку и применим предположение индукции. Получим прямую l, на которой лежат точки $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Нам надо доказать, что и последняя точка A_{k+1} лежит на этой прямой. Отбросим первую точку и применим предположение индукции к точкам $A_2, A_3, ..., A_{k+1}$. Получим, что они все лежат на некоторой прямой l_0 . Но прямые l и l_0 совпадаают, так как обе они проходят через точки A_2 и A_k , а как известно, через две точки можно провести только одну прямую. Поэтому все $k+1$ точек лежат на одной прямой.

8. Утверждение. При разбиении прямоугольника на $n > 2$ прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины.
Доказательство. При $n = 2$ утверждение верно. Предположим, что при разбиении прямоугольника на $k > 2$ прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины. Разделим какой-нибудь прямоугольник на два прямоугольника. Тогда эти у этих двух прямоугольников совпадают две вершины. Итак, мы получили, что данный прямоугольник разбит на $k+1$ прямоугольников среди которых есть два, у которых совпадают две вершины.

9. В стране несколько городов соединенных дорогами, так из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажем, то из любого города можно проехать в любой другой.
Доказательство. Индукция по количеству городов в стране. База индукции. Если городов 2, то по условию они должны быть связаны между собой. Индукционный переход. Пусть для n городов все доказано. Добавим $n+1$-й город. По условию из этого города ведет дорога в один из старых n городов. Следовательно, до него можно доехать в один из старых городов, а оттуда уже добраться до любого другого.

10. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)
Доказательство. Будем доказывать, что мы не только можем проехать n километров, но и можем сделать сколь угодно большой запас бензина в точке на расстоянии n километров от края пустыни, оказавшись в этой точке после окончания перевозок. База индукции ($n = 1$). Рейс на расстояние 1 и обратно требует 2 единиц бензина (будем называть единицей количество бензина на километр пути), поэтому мы можем оставить 48 единиц бензина в хранилище (на расстоянии километра от края) и вернуться за новой порцией. (Осторожный человек оставлял бы чуть меньше — скажем, 47 единиц, — чтобы не возвращаться с совсем уж пустым баком.) Но так или иначе, за несколько рейсов в хранилище можно сделать запас произвольного размера, какого нам потребуется. (При этом «коэффициент полезного действия» составляет 48/50: чтобы создать 48 единиц запаса, мы расходуем 50 единиц.)
Шаг индукции. Мы должны научиться создавать хранилище на расстоянии n с любым заданным наперёд запасом бензина (и оказаться у этого хранилища в конце перевозок). Как мы только что видели, это возможно, если в точке $n-1$ имеется неограниченный запас бензина (база индукции). Но по предположению индукции, мы можем запасти любое количество бензина (А единиц при сколь угодно большом А) на расстоянии $n-1$ от края!

11. 8 марта каждая из n учительниц пришла в школу с одним цветком. При этом оказалось, что все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все имеющиеся у нее цветы или их часть. Нельзя дарить букет, если букет, состоящий из точно таких же цветов, уже кому-то дарили. Какое наибольшее количество букетов могло быть подарено? (один цветок – это тоже букет)
Ответ $2^n - 1$.
Доказательство. Всего из n цветов можно составить $2^n - 1$ различных букетов. Индукция по количеству учительниц. База индукции ($n = 2$): Пусть первая учительница принесла розу, а вторая – тюльпан. Первая дарит второй розу, а затем вторая первой – оба цветка, затем первая дарит второй тюльпан. Индукционный переход (от k к k+1). Пусть первая учительница принесла розу. Сначала она стоит в стороне, а все остальные учительницы дарят друг другу всевозможные букеты без розы согласно алгоритму для k. Последний букет из одного цветка (скажем, тюльпана) дарится первой учительнице. Далее тюльпан с розой «склеиваются» в один цветок и и снова k учительницу которых есть по одному цветку дарят их друг другу согласно алгоритму для k. В конце учительница с цветком роза-тюльпан дарит розу учительнице без цветка, и теперь подарено $2(2^k - 1) + 1 = 2^k + 1 - 1$. И у каждой учительныицы ровно по одному цветку.