Инварианты. Добавка

1. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что попарные расстояния не изменились.

2. На прямой стоят две фишки, слева - красная, справа - синяя. Разрешается производить следующую операцию: вставка двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю слева?

3. На доске 15×15 стоят 15 не бьющих друг друга ладей. Каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь некоторые две ладьи бьют друг друга.

4. Имеется таблица $n \times n$, в $n - 1$ клетках которой записаны единицы, а в остальных клетках —- нули. Разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем числам в её столбце и строке прибавить единицу. Можно ли при каком-нибудь $n > 1$ из этой таблицы получить таблицу, в которой все числа равны?

5. На доске написаны 100 чисел $1, 2, \ldots, 100$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $\frac{ab}{a+b+1}$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

6. На доске написаны числа $1, 2, \cdot 1000$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа ab и $a^2 + b^2$. Можно ли такими операциями добиться, чтобы среди чисел, написанных на доске, было хотя бы 700 одинаковых?

7. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а так же убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Пусть первоначально было две красные точки. Доказать, что за несколько разрешенных операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.

8. В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину.Можно ли добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

   а) $n = 2018$

   б) $n = 2015$

   в) n - произвольное натуральное число.