

Индукция. Задачи

1. Можно ли разрезать на такие трехклеточные уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины)
а) 2×2 б) 4×4 в) 8×8 г) $2^n \times 2^n$?
2. Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.
3. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние части были окрашены в разные цвета.
4. а) Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой, если в пирамидке n колец.
б) За какое наименьшее количество перекладываний можно переместить n колец?
5. В прямоугольнике $3 \times n$ расставлены фишки трех цветов по n каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце все три фишки стали разными.
6. На какое количество частей делят плоскость 2019 прямых таких, что среди них нет параллельных и любые 3 не пересекаются в одной точке?
7. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести в выпуклом n -угольнике так, чтобы они не пересекались внутри многоугольника?
8. В колбе находится колония из n бактерий. В какой-то момент внутрь колбы попадает вирус. В первую минуту вирус уничтожает одну бактерию, и сразу после этого и вирус и оставшиеся бактерии делятся пополам. Во вторую минуту новые два вируса уничтожают две бактерии, а затем и вирусы. и оставшиеся бактерии снова делятся пополам, и т.д. наступит ли такой момент времени, когда не останется ни одной бактерии?
9. В нескольких местах кольцевой дороги стоят автомобили. Если весь бензин, имеющийся в их баках, слить в одну машину, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места. Докажите, что по меньшей мере одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.
10. * Есть 2019000 орехов, которые лежат в 2019 коробках. Белка решила, разложить орехи по 1000 в коробку. За ход белка может переложить любое количество орехов между любыми двумя соседними коробками. Докажите, что за 2018 ходов может добиться цели

Домашнее задание

11. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Доказать, что эту картинку можно обвести "одним росчерком то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

Индукция. Задачи

1. Можно ли разрезать на такие трехклеточные уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины)
а) 2×2 б) 4×4 в) 8×8 г) $2^n \times 2^n$?
2. Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.
3. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние части были окрашены в разные цвета.
4. а) Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой, если в пирамидке n колец.
б) За какое наименьшее количество перекладываний можно переместить n колец?
5. В прямоугольнике $3 \times n$ расставлены фишки трех цветов по n каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце все три фишки стали разными.
6. На какое количество частей делят плоскость 2019 прямых таких, что среди них нет параллельных и любые 3 не пересекаются в одной точке?
7. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести в выпуклом n -угольнике так, чтобы они не пересекались внутри многоугольника?
8. В колбе находится колония из n бактерий. В какой-то момент внутрь колбы попадает вирус. В первую минуту вирус уничтожает одну бактерию, и сразу после этого и вирус и оставшиеся бактерии делятся пополам. Во вторую минуту новые два вируса уничтожают две бактерии, а затем и вирусы. и оставшиеся бактерии снова делятся пополам, и т.д. наступит ли такой момент времени, когда не останется ни одной бактерии?
9. В нескольких местах кольцевой дороги стоят автомобили. Если весь бензин, имеющийся в их баках, слить в одну машину, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места. Докажите, что по меньшей мере одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.
10. * Есть 2019000 орехов, которые лежат в 2019 коробках. Белка решила, разложить орехи по 1000 в коробку. За ход белка может переложить любое количество орехов между любыми двумя соседними коробками. Докажите, что за 2018 ходов может добиться цели

Домашнее задание

11. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Доказать, что эту картинку можно обвести "одним росчерком то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.