Показатели

1. Пусть a, n — взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел: $1,\ a,\ a^2,\ \ldots$ Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

   Определение Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется *показателем* a по модулю n. Далее будем обозначать его буквой d.

2. а) Зафиксируем взаимно простые числа a и n. Докажите, что d — показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d — наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n.

   б) Пусть d — показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что d делит l.

   в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.

   г) Докажите, что показатель любого взаимно простого с n числа по модулю n делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).

3. Найдите все простые p и q такие, что q делит $(2^p - 1)$ и p делит $(2^q - 1)$.

4. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

5. а) Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $(a^p - 1)$ или делит $(a - 1)$ или имеет вид $2px + 1$.

   б) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.

6. а) Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

   б) Пусть p — простое число и $p > 3$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то $p \equiv 1 \pmod{6}$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $6n + 1$.

   в) Пусть p — простое число и $p > 5$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то $p \equiv 1 \pmod{5}$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n + 1$.

7. Найдите все простые p и q, для которых $5^p + 5^q$ делится на pq.

8. Найдите все натуральные n такие, что n делит $(2^n - 1)$.