Перестановки

Определение. *Перестановкой из n элементов называется взаимно однозначное отображение множества $\{1,2,...,n\}$ в себя. Перестановки записывают таблицами вида* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$*; такая таблица означает перестановку $1 \to 2$ (то есть 1 переходит в 2), $2 \to 4, 3 \to 1, 4 \to 3$.*

Определение. *Перестановка при которой все элементы остаются на месте называется тождественной, часто ее обозначают* $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

Определение. *Произведением $\sigma\tau$ перестановок σ и τ определяется так: $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ (для произвольных отображений σ и τ такое произведение обычно называется композицией отображений) . Например, если* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *и* $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$*, то* $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Какой перестановке будет соответствовать
   а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$?
2. Всегда ли $\sigma\tau = \tau\sigma$?
3. а) Докажите, что для любой перестановки σ существует единственная перестановка σ^{-1} такая, что $\sigma\sigma^{-1} = e$. Такая перестановка называется обратной.
   б) Верно ли, что $\sigma^{-1}\sigma = e$?
   в) Докажите, что для любых перестановок σ, τ, η имеет место равенство $\sigma(\tau\eta) = (\sigma\tau)\eta$.
   г) Докажите, что если $\sigma\tau = \sigma\eta$, то непременно $\tau = \eta$.
4. Вычислите а) $\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}^{100}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{100}$. в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-100}$;

   Определение. *Циклом $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ называется перестановка, циклически переставляющая элементы $a_1, a_2, \dots, a_k$ (то есть $a_1 \to a_2, a_2 \to a_3, \dots, a_k \dots a_1$; имеется в виду, что все элементы $a_1, a_2, \dots, a_k$ различны; все остальные элементы множества $1, ..., n$ переходят в себя). Число k называется длиной цикла.*

5. а) Верно ли что любая перестановка разбивается в произведение независимых циклов (т.е. циклы не имеют общих элементов)?
   б) Верно ли, что для любой цикла σ существует такое натуральное число k, что $\sigma^k = e$? Минимальное k с этим свойством называется порядком перестановки σ. Чему равен порядок цикла?
   в) Докажите, что для любой перестановки σ существует такое натуральное число k, что $\sigma^k = e$. Как порядок перестановки связан с длинами ее циклов?
6. Существуют ли перестановки 9-элементного множества порядков 7,10,12,11, 24?
7. Найдите порядок перестановки а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

   Определение. *Транспозицией называется перестановка, переводящая все элементы кроме i и j в себя, а i и j меняющая местами. Обозначение: (i, j).*

8. а) Докажите, что любую перестановку можно разложить в произведение транспозиций.
   б) Сколько будет транспозиций в цикле длины k?
9. На уроке физкультуры школьники некоторого класса выстроились в шеренгу. Учитель может попросить любых двух школьников поменяться местами (более сложные дествия неминуемо приводят к бардаку). Докажите, что он может расставить школьников по росту.
10. а) Сколько всего перестановок в множестве из n элементов?
    б) Сколько всего циклов длины k в множестве из n элементов?
11. Какие перестановки из n элементов можно получить, перемножая (каждую перестановку можно брать любое число раз) а) $(12), (13), \dots (1n)$; б) $(12), (12\dots n)$?
12. Вася утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика Рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Не привирает ли Вася?

Четность перестановки.

Определение. *Инверсией (или беспорядком) в перестановке σ называется пара (i, j), такая что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Четность числа инверсий называется четностью перестановки.*

1. Выясните, являются четными или нечетными следующие перестановки
   а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
2. Можно ли сказать, сколько инверсий у перестановки σ^{-1}, зная лишь число инверсий у σ?
3. Докажите, что любая транспозиция является нечётной перестановкой.
4. Докажите, что при умножении на транспозицию чётность перестановки меняется.
5. Докажите, что чётность цикла зависит только от его длины. Как?
6. а) Как выражается чётность $\sigma\tau$ через чётности σ и τ?
   б) Как выражается чётность σ^n через чётности σ и n?
7. Три кузнечика играют в чехарду: каждую секунду один из них прыгает через какого-то другого (но не через двух). Могут ли они через 123456789 секунд вернуться на свои места?
8. Верно ли, что любую перестановку можно представить в виде произведения циклов длины 3?
9. У отца было 7 дочерей. Всякий раз, когда одна выходила замуж, каждая старшая сестра, оставшаяся в невестах, жаловалась отцу, что нарушен обычай выходить замуж по старшинству. После того, как вышла замуж последняя дочь, оказалось, что отец услышал всего 7 жалоб. В каком порядке дочери могли выходить замуж (приведите пример)? Сколько всего таких порядков?
10. 2019 машин стартовали и целый день ездили по кругу. Вечером каждая машина оказалась на том же месте откуда и стартовала. Докажите, что было совершено четное число обгонов.
11. Докажите, что нельзя поменять фишки «14» и «15» , так чтобы все остальные остались на своих местах.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

12. После усердных тренировок Вася в совершенстве овладел навыком сборки кубика Рубика. Он уверяет, что может даже собрать кубик Рубика, у которого перевернули ровно один из боковых кубиков (то есть тот, что с двумя цветными гранями). Можно ли верить этому Васе?