Готовимся к ММО 4-5

1. (4) Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство $|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}| > \frac{1}{mn}$.

2. (4) Назовём расстановку n единиц и m нулей по кругу хорошей, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных m и n существует хорошая расстановка?

3. (4) Дано несколько белых и несколько чёрных точек. Из каждой белой точки идёт стрелка в каждую чёрную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на её концах?

4. (4) По кругу разложено чётное количество груш. Массы любых двух соседних отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши объединить в пары и разложить по кругу таким образом, чтобы массы любых двух соседних пар тоже отличались не более, чем на 1 г

5. (4) Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

6. (5)На доске написаны 1000 последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся 1000 последовательных целых чисел.

Готовимся к ММО 4-5

1. (4) Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство $|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}| > \frac{1}{mn}$.

2. (4) Назовём расстановку n единиц и m нулей по кругу хорошей, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных m и n существует хорошая расстановка?

3. (4) Дано несколько белых и несколько чёрных точек. Из каждой белой точки идёт стрелка в каждую чёрную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на её концах?

4. (4) По кругу разложено чётное количество груш. Массы любых двух соседних отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши объединить в пары и разложить по кругу таким образом, чтобы массы любых двух соседних пар тоже отличались не более, чем на 1 г

5. (4) Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

6. (5)На доске написаны 1000 последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся 1000 последовательных целых чисел.