Готовимся к ММО 1-3

1. (1) Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее в свою очередь меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?

2. (1) Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, что при любом x справедливо равенство
$$P(x)+P(x+1)+P(x+2)+\ldots+P(x+10)=x^2$$

3. (1) Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 — если зачеркнуть в исходном числе третью цифру,…, делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру.

4. (2) Среди зрителей кинофестиваля было поровну мужчин и женщин. Всем зрителям понравилось одинаковое количество фильмов. Каждый фильм понравился восьми зрителям. Докажите, что не менее $\frac{3}{7}$ фильмов обладают следующим свойством: среди зрителей, которым фильм понравился, не менее двух мужчин.

5. (2) На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по-одному подошли ещё 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовём девочку отважной, если она садилась между двумям соседними мальчиками, а мальчика отважным, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке чередуясь. Сколько из них были отважными?

6. (2) В турнире по футболу участвует $2n$ команд ($n>1$). В каждом туре команды разбиваются на n пар, и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за поражение 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ей очков к количеству сыгранных ей игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.

7. (2) В клетках таблицы $n\times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

8. (3) Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов?

9. (3) Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны?

10. (3) Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S.

Готовимся к ММО 1-3

1. (1) Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее в свою очередь меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?

2. (1) Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, что при любом x справедливо равенство
$$P(x)+P(x+1)+P(x+2)+\ldots+P(x+10)=x^2$$

3. (1) Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 — если зачеркнуть в исходном числе третью цифру,…, делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру.

4. (2) Среди зрителей кинофестиваля было поровну мужчин и женщин. Всем зрителям понравилось одинаковое количество фильмов. Каждый фильм понравился восьми зрителям. Докажите, что не менее $\frac{3}{7}$ фильмов обладают следующим свойством: среди зрителей, которым фильм понравился, не менее двух мужчин.

5. (2) На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по-одному подошли ещё 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовём девочку отважной, если она садилась между двумям соседними мальчиками, а мальчика отважным, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке чередуясь. Сколько из них были отважными?

6. (2) В турнире по футболу участвует $2n$ команд ($n>1$). В каждом туре команды разбиваются на n пар, и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за поражение 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ей очков к количеству сыгранных ей игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.

7. (2) В клетках таблицы $n\times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

8. (3) Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов?

9. (3) Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны?

10. (3) Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S.