Лемма Холла

Будем называть множество из k юношей перспективным, если суммарно эти юноши знают хотя бы k девушек, а критическим — если они знают ровно k девушек. Лемма Холла гласит, что всех юношей можно женить на знакомых им девушках тогда и только тогда, когда любое множество юношей является перспективным.

1. Предположим, что любое множество юношей является перспективным. Рассмотрим наименьшее критическое множество юношей (если оно есть). Докажите, что можно поженить любого юношу из наименьшего критического множества на любой его знакомой, и все множества останутся перспективными. Выведите отсюда лемму Холла.
2. Предположим, что любое множество юношей является перспективным. Предполо- жим, что нельзя женить всех одновременно. Тогда рассмотрим наибольшее количество пар, которое можно образовать. Рассмотрим юношу, не вошедшего в эти пары. Он начинает организовывать своё тайное общество. В первый день в этом обществе только он. Каждый следующий день каждый юноша, входящий в это общество приглашает туда всех знакомых с ним девушек, а они приводят туда своих мужей (если таковые есть). Докажите, что рано или поздно в общество придёт девушка, которая в первоначальное разделение на пары не входила. Докажите, что в таком случае можно переженить людей так, чтобы количество пар увеличилось. Выведите отсюда лемму Холла.
3. Докажите, что если для некоторого $k > 0$ каждый парень знает ровно k девушек, и каждая девушка знает ровно k парней, то всех юношей можно женить на знакомых девушках.
4. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.
5. В частном охранном предприятии работает n охранников. Ежедневно им нужно распределяться по n объектам. По прошествии k дней оказалось, что никто дважды на одном объекте не дежурил. Докажите, что можно составить расписание на оставшиеся $n-k$ дней так, чтобы все охранники подежурили по одному разу на всех объектах.
6. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
7. Табло состоит из 2017 лампочек. Двое играют в следующую игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т.е. выключает или включает её), при этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?
8. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.
9. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

Лемма Холла

Будем называть множество из k юношей перспективным, если суммарно эти юноши знают хотя бы k девушек, а критическим — если они знают ровно k девушек. Лемма Холла гласит, что всех юношей можно женить на знакомых им девушках тогда и только тогда, когда любое множество юношей является перспективным.

1. Предположим, что любое множество юношей является перспективным. Рассмотрим наименьшее критическое множество юношей (если оно есть). Докажите, что можно поженить любого юношу из наименьшего критического множества на любой его знакомой, и все множества останутся перспективными. Выведите отсюда лемму Холла.
2. Предположим, что любое множество юношей является перспективным. Предполо- жим, что нельзя женить всех одновременно. Тогда рассмотрим наибольшее количество пар, которое можно образовать. Рассмотрим юношу, не вошедшего в эти пары. Он начинает организовывать своё тайное общество. В первый день в этом обществе только он. Каждый следующий день каждый юноша, входящий в это общество приглашает туда всех знакомых с ним девушек, а они приводят туда своих мужей (если таковые есть). Докажите, что рано или поздно в общество придёт девушка, которая в первоначальное разделение на пары не входила. Докажите, что в таком случае можно переженить людей так, чтобы количество пар увеличилось. Выведите отсюда лемму Холла.
3. Докажите, что если для некоторого $k > 0$ каждый парень знает ровно k девушек, и каждая девушка знает ровно k парней, то всех юношей можно женить на знакомых девушках.
4. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.
5. В частном охранном предприятии работает n охранников. Ежедневно им нужно распределяться по n объектам. По прошествии k дней оказалось, что никто дважды на одном объекте не дежурил. Докажите, что можно составить расписание на оставшиеся $n-k$ дней так, чтобы все охранники подежурили по одному разу на всех объектах.
6. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
7. Табло состоит из 2017 лампочек. Двое играют в следующую игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т.е. выключает или включает её), при этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?
8. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.
9. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?