

## Китайская теорема об остатках-2.

**Китайская теорема об остатках.** Если числа  $m_1, m_2, \dots, m_n$  попарно взаимно просты, то для произвольных целых  $a_1, a_2, \dots, a_n$  существует такое  $x$ , что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

1. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Почему по этим данным вы сможете отгадать задуманное число?
2. Допишите к числу 523 три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7,8,9.
3. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на  $3 \times 5 \times 8$ ?
4. Найдите три последние цифры числа  $2019^{2018^{2017 \dots 2^1}}$ .
5. Пусть  $n$  — натуральное число, у которого ровно  $k$  различных простых делителей. Сколько существует попарно несовместимых по модулю  $n$  целых  $a$  таких, что  $a^2 - a$  делится на  $n$ ?
6. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.  
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 делителей.  
в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 делителей.
7. Пусть  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — попарно взаимнопростые числа. Докажите, что уравнение  $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \dots + x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_n^{k_n}$  имеет решение в натуральных числах.
8. Для любого конечного набора натуральных чисел  $\{a_1, \dots, a_n\}$  докажите, что существует такое число  $b$ , чтобы для любого  $i$  произведение  $a_i b$  будет степенью натурального числа.

## Китайская теорема об остатках-2.

**Китайская теорема об остатках.** Если числа  $m_1, m_2, \dots, m_n$  попарно взаимно просты, то для произвольных целых  $a_1, a_2, \dots, a_n$  существует такое  $x$ , что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

1. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Почему по этим данным вы сможете отгадать задуманное число?
2. Допишите к числу 523 три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7,8,9.
3. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на  $3 \times 5 \times 8$ ?
4. Найдите три последние цифры числа  $2019^{2018^{2017 \dots 2^1}}$ .
5. Пусть  $n$  — натуральное число, у которого ровно  $k$  различных простых делителей. Сколько существует попарно несовместимых по модулю  $n$  целых  $a$  таких, что  $a^2 - a$  делится на  $n$ ?
6. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.  
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 делителей.  
в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 делителей.
7. Пусть  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — попарно взаимнопростые числа. Докажите, что уравнение  $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \dots + x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_n^{k_n}$  имеет решение в натуральных числах.
8. Для любого конечного набора натуральных чисел  $\{a_1, \dots, a_n\}$  докажите, что существует такое число  $b$ , чтобы для любого  $i$  произведение  $a_i b$  будет степенью натурального числа.