Китайская теорема об остатках.

Китайская теорема об остатках. Если числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимнопросты, то для произвольных целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует такое x, что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\ \ldots \\ x \equiv a_n \ (mod\ m_n) \end{cases}$$

1. Докажите, что среди $M = m_1 m_2 \ldots m_n$ последовательных целых чисел есть ровно одно удовлетворяющее условию китайской теоремы об остатках.
2. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?
3. Решите системы сравнений

   a)

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 3 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 7) \end{cases} \quad b) \begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 5 \ (mod\ 7) \\ x \equiv 7 \ (mod\ 11) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 13) \end{cases} \quad c) \begin{cases} x \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 3 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 7 \ (mod\ 10) \end{cases} \quad d) \begin{cases} x \equiv 0 \ (mod\ 2) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 4 \ (mod\ 6) \\ x \equiv 6 \ (mod\ 10) \end{cases}$$

4. Найдите минимальное натуральное число, такое что его половина является квадратом, треть — кубом, седьмая часть — седьмой степенью.
5. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре, но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.
6. Число называется свободным от кубов, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого n найдется n последовательных чисел, не свободных от кубов.
7. Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.
8. Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2018 неадекватных чисел подряд?

Китайская теорема об остатках.

Китайская теорема об остатках. Если числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимнопросты, то для произвольных целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует такое x, что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\ \ldots \\ x \equiv a_n \ (mod\ m_n) \end{cases}$$

1. Докажите, что среди $M = m_1 m_2 \ldots m_n$ последовательных целых чисел есть ровно одно удовлетворяющее условию китайской теоремы об остатках.
2. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?
3. Решите системы сравнений

   a)

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 3 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 7) \end{cases} \quad b) \begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 5 \ (mod\ 7) \\ x \equiv 7 \ (mod\ 11) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 13) \end{cases} \quad c) \begin{cases} x \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 3 \ (mod\ 5) \\ x \equiv 7 \ (mod\ 10) \end{cases} \quad d) \begin{cases} x \equiv 0 \ (mod\ 2) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 4 \ (mod\ 6) \\ x \equiv 6 \ (mod\ 10) \end{cases}$$

4. Найдите минимальное натуральное число, такое что его половина является квадратом, треть — кубом, седьмая часть — седьмой степенью.
5. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре, но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.
6. Число называется свободным от кубов, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого n найдется n последовательных чисел, не свободных от кубов.
7. Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.
8. Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2018 неадекватных чисел подряд?