

Функциональные уравнения. Подстановки

1. Функция $f(x)$ при каждом значении $x \in (-\infty, +\infty)$ удовлетворяет равенству

$$f(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot f(1-x) = 1.$$

- а) Найдите $f(0)$ и $f(1)$.
б) Найдите все такие функции $f(x)$.
2. а) Найдите все такие функции $f : R+ \rightarrow R+$, что для любого $x > 0$ выполнено

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x - \frac{3}{x}.$$

- б) Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех действительных x и удовлетворяющие уравнению

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

- в) Функция $f(x)$ определена и удовлетворяет соотношению

$$(x-1) \cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$

при всех $x \neq 1$. Найдите все такие функции.

3. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

4. Найдите все функции $f(x)$, которые определены для всех x и удовлетворяют соотношению для всех x и y

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y).$$

5. Для каких α существует функция $f : R \rightarrow R$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)?$$

6. Найдите все функции $f : R \rightarrow R$, которые для всех $x, y, z \in R$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z).$$

7. Существует ли ограниченная функция $f : R \rightarrow R$ такая, что $f(1) > 0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y \in R$ неравенству

$$f^2(x+y) \geq f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)?$$

Функциональные уравнения. Подстановки

1. Функция $f(x)$ при каждом значении $x \in (-\infty, +\infty)$ удовлетворяет равенству

$$f(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot f(1-x) = 1.$$

- а) Найдите $f(0)$ и $f(1)$.
б) Найдите все такие функции $f(x)$.

2. а) Найдите все такие функции $f : R+ \rightarrow R+$, что для любого $x > 0$ выполнено

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x - \frac{3}{x}.$$

- б) Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех действительных x и удовлетворяющие уравнению

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

- в) Функция $f(x)$ определена и удовлетворяет соотношению

$$(x-1) \cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$

при всех $x \neq 1$. Найдите все такие функции.

3. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

4. Найдите все функции $f(x)$, которые определены для всех x и удовлетворяют соотношению для всех x и y

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y).$$

5. Для каких α существует функция $f : R \rightarrow R$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)?$$

6. Найдите все функции $f : R \rightarrow R$, которые для всех $x, y, z \in R$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z).$$

7. Существует ли ограниченная функция $f : R \rightarrow R$ такая, что $f(1) > 0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y \in R$ неравенству

$$f^2(x+y) \geq f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)?$$