Бесконечность 3

1. Продлим шахматную доску вправо и вверх на миллион клеток. Король стоит в левом нижнем углу.
a) Может ли он обойти всю полученную доску, побывав на каждой клетке ровно один раз?
b) А если доску продлили вправо и вверх до бесконечности?
c) Докажите, что рациональных чисел счётно.

2. В стране Фибоначчи есть купюры достоинством 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 лир. У Леонардо есть купюра 55 лир. Каждый день он может пойти в банк и обменять любую имеющуюся у него купюру на любое количество купюр меньшего достоинства. Кроме того, каждый день Леонардо должен тратить 1 лиру на еду. Докажите, что Леонардо сможет существовать сколь угодно долго, но не бесконечно долго.

3. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a метров у себя и на b метров у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе
a) конечно?
b) бесконечно?

4. **a)** Можно ли покрыть прямую с помощью 2017 кругов?
b) Можно ли покрыть плоскость с помощью 2017 полос (полоса часть плоскости между параллельными прямыми)?

5. Можно ли покрыть плоскость внутренностями парабол?
a) Конечным числом?
b) Счётным числом?

6. Можно ли покрыть плоскость углами с суммарной градусной мерой 2°?
a) Конечным числом?
b) Счётным числом?

7. *Плотностью* арифметической прогрессии $a + bk$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ назовем величину $\frac{1}{b}$. Можно ли покрыть все натуральные числа арифметическими прогрессиями с суммарной плотностью меньше 1?
a) Конечным числом?
b) Счётным числом?

Бесконечность 3

1. Продлим шахматную доску вправо и вверх на миллион клеток. Король стоит в левом нижнем углу.
a) Может ли он обойти всю полученную доску, побывав на каждой клетке ровно один раз?
b) А если доску продлили вправо и вверх до бесконечности?
c) Докажите, что рациональных чисел счётно.

2. В стране Фибоначчи есть купюры достоинством 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 лир. У Леонардо есть купюра 55 лир. Каждый день он может пойти в банк и обменять любую имеющуюся у него купюру на любое количество купюр меньшего достоинства. Кроме того, каждый день Леонардо должен тратить 1 лиру на еду. Докажите, что Леонардо сможет существовать сколь угодно долго, но не бесконечно долго.

3. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a метров у себя и на b метров у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе
a) конечно?
b) бесконечно?

4. **a)** Можно ли покрыть прямую с помощью 2017 кругов?
b) Можно ли покрыть плоскость с помощью 2017 полос (полоса часть плоскости между параллельными прямыми)?

5. Можно ли покрыть плоскость внутренностями парабол?
a) Конечным числом?
b) Счётным числом?

6. Можно ли покрыть плоскость углами с суммарной градусной мерой 2°?
a) Конечным числом?
b) Счётным числом?

7. *Плотностью* арифметической прогрессии $a + bk$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ назовем величину $\frac{1}{b}$. Можно ли покрыть все натуральные числа арифметическими прогрессиями с суммарной плотностью меньше 1?
a) Конечным числом?
b) Счётным числом?