

## Бесконечность

1. Кузнечик стартует из точки 0 и скачет по целым точкам числовой прямой. Длина его прыжка не превышает 2020.
  - a) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках от  $-15681568$  до  $15681568$ ?
  - b) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках числовой прямой?
2. Докажите, что из бесконечной последовательности различных натуральных чисел можно выделить бесконечную возрастающую подпоследовательность
3. Докажите, что среди 11 чисел, можно выбрать 2 таких, что их десятичные записи совпадают в бесконечном числе разрядов.
4. По данным последней записи, на кружок 10 класса пришло счётное число школьников. Кроме того, у каждого из них есть балл на чудо-олимпиаде (особенность чудо-олимпиады в том, что участник может отдавать свои баллы другим участникам). Докажите, что они могут перераспределить баллы так, что у всех из них будет больше миллиона баллов.
5. Вера построила последовательность из 2020 различных натуральных чисел, где для любого  $k \leq 2020$  сумма первых  $k$  чисел делилась на  $k$ . Докажите, что последовательность можно продолжить до бесконечности с сохранением условия о делимости и так, чтобы каждое натуральное число встретилось ровно один раз.
6. Аня и Арина по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Аня своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Арина — одну цифру. Так продолжается, пока не будет выписана вся бесконечная дробь. Если в итоге она получится периодической (без предпериода), выигрывает Аня, иначе — Арина. Кто имеет выигрышную стратегию?

## Бесконечность

1. Кузнечик стартует из точки 0 и скачет по целым точкам числовой прямой. Длина его прыжка не превышает 2020.
  - a) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках от  $-15681568$  до  $15681568$ ?
  - b) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках числовой прямой?
2. Докажите, что из бесконечной последовательности различных натуральных чисел можно выделить бесконечную возрастающую подпоследовательность
3. Докажите, что среди 11 чисел, можно выбрать 2 таких, что их десятичные записи совпадают в бесконечном числе разрядов.
4. По данным последней записи, на кружок 10 класса пришло счётное число школьников. Кроме того, у каждого из них есть балл на чудо-олимпиаде (особенность чудо-олимпиады в том, что участник может отдавать свои баллы другим участникам). Докажите, что они могут перераспределить баллы так, что у всех из них будет больше миллиона баллов.
5. Вера построила последовательность из 2020 различных натуральных чисел, где для любого  $k \leq 2020$  сумма первых  $k$  чисел делилась на  $k$ . Докажите, что последовательность можно продолжить до бесконечности с сохранением условия о делимости и так, чтобы каждое натуральное число встретилось ровно один раз.
6. Аня и Арина по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Аня своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Арина — одну цифру. Так продолжается, пока не будет выписана вся бесконечная дробь. Если в итоге она получится периодической (без предпериода), выигрывает Аня, иначе — Арина. Кто имеет выигрышную стратегию?