

## НОД и Алгоритм Евклида

### Свойства НОД:

- $(am, an) = a \cdot (m, n)$ .
  - Если  $(m, n) = d$ , то  $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$ .
  - $(a, b) = (a \pm b, b)$ .
  - $(a, b) = (a \pm kb, b)$ .
  - $(a, b) = (a \bmod b, b)$
- Докажите, что при любых натуральных  $n$  дробь  $\frac{12n+1}{30n+1}$  несократима.
  - Вася и Петя нашли на дороге по пачке 11-рублевок. В чайной Вася выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Петя выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Вася может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Петя.
  - Найдите целые  $u, v$  такие, что  $144u + 85v = 1$ .
  - Найдите
    - $(99! + 100!, 101!)$ ;
    - $(\underbrace{(11 \dots 1)}_{85}, \underbrace{(11 \dots 1)}_{151})$ ;
    - $(\underbrace{(11 \dots 1)}_{85}, \underbrace{(11 \dots 1)}_{151})$ ;
    - $(2^n - 1, 2^m - 1)$ ;
    - $(5^{2^6-1} - 1, 5^{4^5-1} - 1)$ .
  - Найдите пару трехзначных чисел, на которых алгоритм Евклида совершит наибольшее число итераций.
  - Может ли произведение трёх последовательных натуральных чисел быть степенью натурального числа (квадратом, кубом и т.д.)?
  - Докажите, что для нечётных чисел  $a, b$  и  $c$  имеет место равенство  $(1/2(b+c), 1/2(a+c), 1/2(a+b)) = (a, b, c)$ .
  - Докажите, что  $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$ , где  $F_n$  стоит на  $n$ -ом месте в ряде Фибоначчи.
  - Последовательность натуральных чисел  $a_i$  такова, что  $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$  для всех  $i \neq j$ . Докажите, что  $a_i = i$  для всех натуральных  $i$ .
  - По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы каждые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное  $N$ , на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.
- Домашнее задание**
- Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя
    - ровно в шесть раз;
    - ровно в пять раз?

## НОД и Алгоритм Евклида

### Свойства НОД:

- $(am, an) = a \cdot (m, n)$ .
  - Если  $(m, n) = d$ , то  $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$ .
  - $(a, b) = (a \pm b, b)$ .
  - $(a, b) = (a \pm kb, b)$ .
  - $(a, b) = (a \bmod b, b)$
- Докажите, что при любых натуральных  $n$  дробь  $\frac{12n+1}{30n+1}$  несократима.
  - Вася и Петя нашли на дороге по пачке 11-рублевок. В чайной Вася выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Петя выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Вася может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Петя.
  - Найдите целые  $u, v$  такие, что  $144u + 85v = 1$ .
  - Найдите
    - $(99! + 100!, 101!)$ ;
    - $(\underbrace{(11 \dots 1, 11 \dots 1)}_{85}, \underbrace{(11 \dots 1, 11 \dots 1)}_{151})$ ;
    - $(\underbrace{(11 \dots 1, 11 \dots 1)}_{85}, \underbrace{(11 \dots 1, 11 \dots 1)}_{151})$ ;
    - $(2^n - 1, 2^m - 1)$ ;
    - $(5^{2^6-1} - 1, 5^{4^5-1} - 1)$ .
  - Найдите пару трехзначных чисел, на которых алгоритм Евклида совершит наибольшее число итераций.
  - Может ли произведение трёх последовательных натуральных чисел быть степенью натурального числа (квадратом, кубом и т.д.)?
  - Докажите, что для нечётных чисел  $a, b$  и  $c$  имеет место равенство  $(1/2(b+c), 1/2(a+c), 1/2(a+b)) = (a, b, c)$ .
  - Докажите, что  $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$ , где  $F_n$  стоит на  $n$ -ом месте в ряде Фибоначчи.
  - Последовательность натуральных чисел  $a_i$  такова, что  $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$  для всех  $i \neq j$ . Докажите, что  $a_i = i$  для всех натуральных  $i$ .
  - По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы каждые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное  $N$ , на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.
- Домашнее задание**
- Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя
    - ровно в шесть раз;
    - ровно в пять раз?