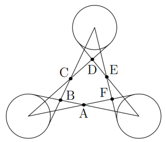
Отрезки касательных

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B — окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC.
   а) Докажите, что если ω_D и ω_B касаются, то в $ABCD$ можно вписать окружность.
   б) Докажите, что если $ABCD$ — описанный четырёхугольник, то ω_D и ω_B касаются.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AB и AD в точках M и N. Вписанная окружность треугольника CBD касается его сторон CB и CD в точках P и Q. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной прямой.

3. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая ℓ, лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB, продолжения стороны BC за точку B и прямой ℓ в точке P. Окружность ω_C касается отрезка AC, продолжения стороны BC за точку C и прямой ℓ в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой ℓ.

4. Даны три окружности равного радиуса. Для каждой окружности из её центра проведены касательные к двум другим окружностям так, как показано на рисунке. Докажите, что $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.



5. **Еще один критерий описанного четырехугольника.** Пусть BD — внешняя диагональ невыпуклого четырехугольника $ABCD$. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q. Тогда в четырехугольник $APCQ$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда
   а) суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны;
   б) $PB + PD = QB + QD$.

6. На сторонах AB, AD описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки BY и DX пересекаются в точке Z.
   а) Докажите, что если $AXZY$ — описанный, то $BCDZ$ — тоже описанный.
   б) Докажите, что если $BCDZ$ — описанный, то $AXZY$ — тоже описанный.

7. а) Пусть D — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и DBC касаются.
   б) Пусть D — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что вневписанные окружности треугольников ABD и BCD, касающиеся отрезка AC, касаются.

8. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.

Домашнее задание

9. К двум непересекающимся окружностям ω_I и ω_J с центрами I и J проведены два отрезка общих внешних касательных. На одном отрезке отмечена точка A, на другом — точки B и C так, что AB касается ω_I и AC касается ω_J. Вневписанная окружность треугольника ABC касается отрезка BC в точке D. Докажите, что середина отрезка IJ равноудалена от точек A и D.

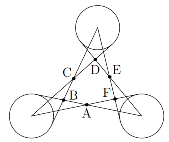
Отрезки касательных

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B — окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC.
   а) Докажите, что если ω_D и ω_B касаются, то в $ABCD$ можно вписать окружность.
   б) Докажите, что если $ABCD$ — описанный четырёхугольник, то ω_D и ω_B касаются.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AB и AD в точках M и N. Вписанная окружность треугольника CBD касается его сторон CB и CD в точках P и Q. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной прямой.

3. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая ℓ, лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB, продолжения стороны BC за точку B и прямой ℓ в точке P. Окружность ω_C касается отрезка AC, продолжения стороны BC за точку C и прямой ℓ в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой ℓ.

4. Даны три окружности равного радиуса. Для каждой окружности из её центра проведены касательные к двум другим окружностям так, как показано на рисунке. Докажите, что $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.



5. **Еще один критерий описанного четырехугольника.** Пусть BD — внешняя диагональ невыпуклого четырехугольника $ABCD$. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q. Тогда в четырехугольник $APCQ$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда
   а) суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны;
   б) $PB + PD = QB + QD$.

6. На сторонах AB, AD описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки BY и DX пересекаются в точке Z.
   а) Докажите, что если $AXZY$ — описанный, то $BCDZ$ — тоже описанный.
   б) Докажите, что если $BCDZ$ — описанный, то $AXZY$ — тоже описанный.

7. а) Пусть D — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и DBC касаются.
   б) Пусть D — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что вневписанные окружности треугольников ABD и BCD, касающиеся отрезка AC, касаются.

8. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.

Домашнее задание

9. К двум непересекающимся окружностям ω_I и ω_J с центрами I и J проведены два отрезка общих внешних касательных. На одном отрезке отмечена точка A, на другом — точки B и C так, что AB касается ω_I и AC касается ω_J. Вневписанная окружность треугольника ABC касается отрезка BC в точке D. Докажите, что середина отрезка IJ равноудалена от точек A и D.