

Окружность и прямая Эйлера

Прямая Эйлера. В треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, причём точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2MO$.

Окружность девяти точек (или окружность Эйлера). Основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной окружности.

1. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и окружность ω , описанную вокруг его ортотреугольника.
 - а) С помощью леммы о трезубце докажите, что точки середины отрезков соединяющих вершины с ортоцентром расположены на окружности ω .
 - б) С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что середины сторон расположены на окружности ω .
2. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC является окружностью девяти точек для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .
3. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через центр окружности девяти точек.
4. Как соотносятся прямые Эйлера треугольника и его серединного треугольника?
5. H – ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что:
 - а) окружности девяти точек треугольников ABC , HAB , HBC и HCA совпадают;
 - б) прямые Эйлера этих треугольников пересекаются в одной точке.
6. Найдите угол A треугольника ABC , если на его окружности девяти точек лежит середина отрезка AO , где O – центр описанной окружности
7. В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили четыре точки: центры вписанной и описанной окружностей, точку пересечения медиан и ортоцентр. Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.
8. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H . Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – его высоты; A_0, B_0, C_0 – середины соответствующих сторон; A', B', C' – середины отрезков AH, BH, CH соответственно. Докажите, что
 - а) $A_1B_1 \perp C'C_0$, $C_1B_1 \perp A'A_0$, $A_1C_1 \perp B'B_0$;
 - б) отрезки $A'A_0, B'B_0, C'C_0$ пересекаются в одной точке.
9. Докажите, что отрезок, высекаемый на стороне AB остроугольного треугольника ABC окружностью девяти точек, виден из ее центра под углом $2|\angle A - \angle B|$.
10. Прямая Эйлера треугольника ABC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q так, что $AP = AQ$. Найдите угол A .

Окружность и прямая Эйлера

Прямая Эйлера. В треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, причём точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2MO$.

Окружность девяти точек (или окружность Эйлера). Основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной окружности.

1. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и окружность ω , описанную вокруг его ортотреугольника.
 - а) С помощью леммы о трезубце докажите, что точки середины отрезков соединяющих вершины с ортоцентром расположены на окружности ω .
 - б) С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что середины сторон расположены на окружности ω .
2. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC является окружностью девяти точек для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .
3. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через центр окружности девяти точек.
4. Как соотносятся прямые Эйлера треугольника и его серединного треугольника?
5. H – ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что:
 - а) окружности девяти точек треугольников ABC , HAB , HBC и HCA совпадают;
 - б) прямые Эйлера этих треугольников пересекаются в одной точке.
6. Найдите угол A треугольника ABC , если на его окружности девяти точек лежит середина отрезка AO , где O – центр описанной окружности
7. В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили четыре точки: центры вписанной и описанной окружностей, точку пересечения медиан и ортоцентр. Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.
8. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H . Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – его высоты; A_0, B_0, C_0 – середины соответствующих сторон; A', B', C' – середины отрезков AH, BH, CH соответственно. Докажите, что
 - а) $A_1B_1 \perp C'C_0$, $C_1B_1 \perp A'A_0$, $A_1C_1 \perp B'B_0$;
 - б) отрезки $A'A_0, B'B_0, C'C_0$ пересекаются в одной точке.
9. Докажите, что отрезок, высекаемый на стороне AB остроугольного треугольника ABC окружностью девяти точек, виден из ее центра под углом $2|\angle A - \angle B|$.
10. Прямая Эйлера треугольника ABC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q так, что $AP = AQ$. Найдите угол A .

