Лемма о трезубце

1. Дан треугольник ABC, $AB \neq AC$. Пусть середина BC это точка A_0. Также в задаче считаются известным радиусы вписанной окружности r, описанной R и вневписанных r_a, r_b, r_c. Докажите утверждения:
а) Биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC в точке W_A.
б) Найдите $W_A A_0$.
в) Внешняя биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности в точке W^A, описанной около треугольника ABC.
г) Найдите $W^A A_0$. Докажите **формулу Карно** $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

2. **Лемма о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центр I вписанной окружности, центр I_A вневписанной окружности напротив вершины A и середину A_0 «меньшей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I = A_0I_A$

3. **Внешняя версия леммы о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центры I_B и I_C вневписанных окружностей напротив вершин B и C и середину A_0 «большей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I_B = A_0I_C$.

4. Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r соответственно.
а) Точка I — центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_0. Докажите, что $IA\Delta IA_0 = 2Rr$.
б) Докажите **формулу Эйлера**: $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d — расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

5. В неравнобедренном треугольнике ABC центр вписанной окружности обозначен через I. Докажите, что прямые AB и AC высекают равные хорды на описанной окружности треугольника BIC.

6. а)На «меньших» дугах AB и BC описанной окружности треугольника ABC отмечены середины — M и N. Пусть X — середина отрезка MN. Докажите, что $BX = XI$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.
б)Прямая, соединяющая середины «меньших» дуг AB, AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y . Докажите, что $AXIY$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

7. Точка I– центр вписанной окружности треугольника ABC Внутри треугольника выбрана такая точка P, что
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$
Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с точкой I.

8. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

9. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках B_0 и C_0 соответственно и пересекают друг друга в точке I. Окружности ω_B и ω_C с центрами в B_0 и C_0 касаются отрезков AC и AB соответственно. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_B и ω_C проходят через точки A и I.

10. * В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AA_1. Из точки A_1 опущены перпендикуляры A_1C_2 и A_1B_2 на стороны AB и AC. Отрезки AA_1 и B_2C_2 продолжили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC и получили треугольник $A_3B_3C_3$. Докажите, что A_1 является центром вписанной окружности треугольника $A_3B_3C_3$.

Домашнее задание

11. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90^o$. В каком отношении I делит отрезок CW?

12. Из точки B проведены прямые, касающиеся окружности ω в точках A и C. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, лежат на окружности ω.

Лемма о трезубце

1. Дан треугольник ABC, $AB \neq AC$. Пусть середина BC это точка A_0. Также в задаче считаются известным радиусы вписанной окружности r, описанной R и вневписанных r_a, r_b, r_c. Докажите утверждения:
а) Биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC в точке W_A.
б) Найдите $W_A A_0$.
в) Внешняя биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности в точке W^A, описанной около треугольника ABC.
г) Найдите $W^A A_0$. Докажите **формулу Карно** $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

2. **Лемма о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центр I вписанной окружности, центр I_A вневписанной окружности напротив вершины A и середину A_0 «меньшей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I = A_0I_A$

3. **Внешняя версия леммы о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центры I_B и I_C вневписанных окружностей напротив вершин B и C и середину A_0 «большей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I_B = A_0I_C$.

4. Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r соответственно.
а) Точка I — центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_0. Докажите, что $IA\Delta IA_0 = 2Rr$.
б) Докажите **формулу Эйлера**: $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d — расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

5. В неравнобедренном треугольнике ABC центр вписанной окружности обозначен через I. Докажите, что прямые AB и AC высекают равные хорды на описанной окружности треугольника BIC.

6. а)На «меньших» дугах AB и BC описанной окружности треугольника ABC отмечены середины — M и N. Пусть X — середина отрезка MN. Докажите, что $BX = XI$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.
б)Прямая, соединяющая середины «меньших» дуг AB, AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y . Докажите, что $AXIY$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

7. Точка I– центр вписанной окружности треугольника ABC Внутри треугольника выбрана такая точка P, что
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$
Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с точкой I.

8. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

9. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках B_0 и C_0 соответственно и пересекают друг друга в точке I. Окружности ω_B и ω_C с центрами в B_0 и C_0 касаются отрезков AC и AB соответственно. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_B и ω_C проходят через точки A и I.

10. * В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AA_1. Из точки A_1 опущены перпендикуляры A_1C_2 и A_1B_2 на стороны AB и AC. Отрезки AA_1 и B_2C_2 продолжили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC и получили треугольник $A_3B_3C_3$. Докажите, что A_1 является центром вписанной окружности треугольника $A_3B_3C_3$.

Домашнее задание

11. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90^o$. В каком отношении I делит отрезок CW?

12. Из точки B проведены прямые, касающиеся окружности ω в точках A и C. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, лежат на окружности ω.