Гомотетия-2

1. Докажите, что неравные треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.

2. В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c - центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соовтетственно, A_1, B_1, C_1 - точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответсвтенно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.

3. а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 - середины «меньших» дуг BC, AC, AB описанной окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.
б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI, где I- центр вписанной окружности, а O- центр описанной окружности.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.

5. В углы CAB, ABC, BCA треугольника ABC вписаны равные непересекающиеся окружности ω_A, ω_B, ω_C. Окружность ω касается их всех внешним образом. Докажите, что центр ω лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Средние линии треугольников AB_0C_0, A_0BC_0, A_0B_0C, параллельные сторонам треугольника $A_0B_0C_0$, образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что
а) прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в точке K;
б) точки K, I, O лежат на одной прямой.

Гомотетия-2

1. Докажите, что неравные треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.

2. В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c - центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соовтетственно, A_1, B_1, C_1 - точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответсвтенно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.

3. а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 - середины «меньших» дуг BC, AC, AB описанной окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.
б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI, где I- центр вписанной окружности, а O- центр описанной окружности.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.

5. В углы CAB, ABC, BCA треугольника ABC вписаны равные непересекающиеся окружности ω_A, ω_B, ω_C. Окружность ω касается их всех внешним образом. Докажите, что центр ω лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Средние линии треугольников AB_0C_0, A_0BC_0, A_0B_0C, параллельные сторонам треугольника $A_0B_0C_0$, образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что
а) прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в точке K;
б) точки K, I, O лежат на одной прямой.