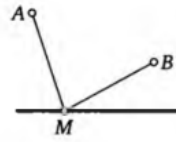
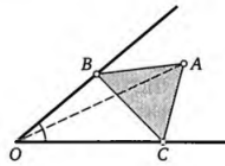


### Кратчайшие пути.

1. В каком месте следует построить мост  $MN$  через реку, разделяющую деревни  $A$  и  $B$ , чтобы путь  $AMNB$  из  $A$  в  $B$  был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)



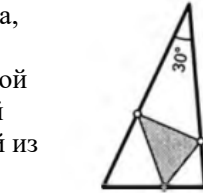
2. **Задача Герона.** Точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой. Постройте на этой прямой такую точку  $M$ , чтобы сумма отрезков  $AM + BM$  была минимальна.



3. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данной высотой, проведенной к этому основанию, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

4. Точки  $A$  и  $B$  находятся по разные стороны от прямой. Найдите на этой прямой такую точку  $M$ , чтобы модуль разности  $|AM - BM|$  принимал наибольшее значение.

5. а) Внутри острого угла с вершиной  $O$  взяли точку  $A$ . Постройте на двух его сторонах точки  $B$  и  $C$  так, чтобы периметр треугольника  $ABC$  был наименьшим.



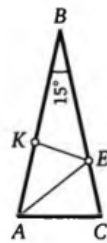
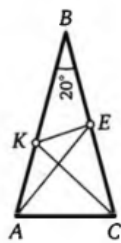
- б) Внутри угла даны точки  $M$  и  $N$ . Найдите на сторонах угла точки  $A$  и  $B$  (по одной на каждой стороне), для которых периметр четырехугольника с вершинами в точках  $M, A, B, N$  наименьший.

- в) Найдите минимальный периметр треугольника  $ABC$  из пункта а, если  $OA=1$ , а величина данного угла равна  $30^\circ$ .

- г) Один из углов остроугольного треугольника равен  $30^\circ$ . На каждой его стороне выбрали по одной точке. Докажите, что минимальный периметр образованного этими точками треугольника равен одной из высот исходного треугольника.

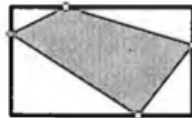
- д) В треугольнике  $ABC$  выбраны точки  $K, L, M$  на сторонах  $AC, BC, AB$  соответственно. Докажите, что из всех таких треугольников  $KLM$  минимальный периметр имеет ортоцентрический треугольник.

6. а) В треугольнике  $ABC$  боковые стороны  $AB$  и  $BC$  равны 1, а угол  $ABC$  равен  $20^\circ$ . На стороне  $AB$  выбирают произвольную точку  $K$ , а на стороне  $BC$  — произвольную точку  $E$ . Найдите минимум суммы  $AE + EK + KC$ .



- б) Боковые стороны  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равны 1, а угол между ними равен  $15^\circ$ . На стороне  $AB$  выбирают произвольную точку  $K$ , а на стороне  $BC$  — произвольную точку  $E$ . Найдите минимум  $AE + EK$ .

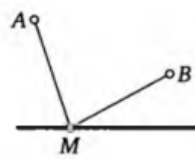
7. На каждой стороне прямоугольника взяли по одной точке. Докажите, что наименьший периметр образованного этими точками четырехугольника равен сумме диагоналей прямоугольника.



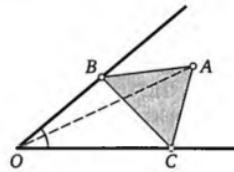
8. Рассмотрим четырехугольную пирамиду  $OABCD$ , такую что  $OA=OB=OC=OD=1$  и  $ABCD$  является квадратом со стороной 1. Какое наименьшее расстояние по поверхности пирамиды должна проползти муха, чтобы попасть из точки пересечения медиан треугольника  $OAB$  в точку пересечения медиан  $OCD$ ?

### Кратчайшие пути.

1. В каком месте следует построить мост  $MN$  через реку, разделяющую деревни  $A$  и  $B$ , чтобы путь  $AMNB$  из  $A$  в  $B$  был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)



2. **Задача Герона.** Точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой. Постройте на этой прямой такую точку  $M$ , чтобы сумма отрезков  $AM + BM$  была минимальна.



3. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данной высотой, проведенной к этому основанию, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

4. Точки  $A$  и  $B$  находятся по разные стороны от прямой. Найдите на этой прямой такую точку  $M$ , чтобы модуль разности  $|AM - BM|$  принимал наибольшее значение.

5. а) Внутри острого угла с вершиной  $O$  взяли точку  $A$ . Постройте на двух его сторонах точки  $B$  и  $C$  так, чтобы периметр треугольника  $ABC$  был наименьшим.

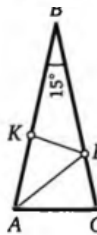
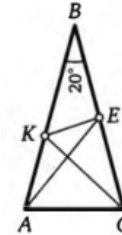
- б) Внутри угла даны точки  $M$  и  $N$ . Найдите на сторонах угла точки  $A$  и  $B$  (по одной на каждой стороне), для которых периметр четырехугольника с вершинами в точках  $M, A, B, N$  наименьший.

- в) Найдите минимальный периметр треугольника  $ABC$  из пункта а, если  $OA=1$ , а величина данного угла равна  $30^\circ$ .

- г) Один из углов остроугольного треугольника равен  $30^\circ$ . На каждой его стороне выбрали по одной точке. Докажите, что минимальный периметр образованного этими точками треугольника равен одной из высот исходного треугольника.

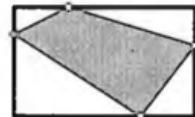
- д) В треугольнике  $ABC$  выбраны точки  $K, L, M$  на сторонах  $AC, BC, AB$  соответственно. Докажите, что из всех таких треугольников  $KLM$  минимальный периметр имеет ортоцентрический треугольник.

6. а) В треугольнике  $ABC$  боковые стороны  $AB$  и  $BC$  равны 1, а угол  $ABC$  равен  $20^\circ$ . На стороне  $AB$  выбирают произвольную точку  $K$ , а на стороне  $BC$  — произвольную точку  $E$ . Найдите минимум суммы  $AE + EK + KC$ .



- б) Боковые стороны  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равны 1, а угол между ними равен  $15^\circ$ . На стороне  $AB$  выбирают произвольную точку  $K$ , а на стороне  $BC$  — произвольную точку  $E$ . Найдите минимум  $AE + EK$ .

7. На каждой стороне прямоугольника взяли по одной точке. Докажите, что наименьший периметр образованного этими точками четырехугольника равен сумме диагоналей прямоугольника.



8. Рассмотрим четырехугольную пирамиду  $OABCD$ , такую что  $OA=OB=OC=OD=1$  и  $ABCD$  является квадратом со стороной 1. Какое наименьшее расстояние по поверхности пирамиды должна проползти муха, чтобы попасть из точки пересечения медиан треугольника  $OAB$  в точку пересечения медиан  $OCD$ ?