Программа зачета за 7-8 классы.

1. Признаки делимости на 2^n,5^n, 9, 11, 7, 13.
2. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?
3. Теория информации. Леша загадал одно четное и одно нечетное число от 1 до 10, За какое наименьшее количество вопросов(с вариантами ответов "да" и "нет") Саше гарантированно получится их узнать?
4. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз и ведущий знает где он находится. Зритель может послать ведущего пачку записок с вопросами, требующих ответа да или нет. Ведущий перемешивает записки в пачке и не оглашая вопросов честно отвечает на них. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать где находится приз?
5. Дед мороз со Снегурочкой собираются показать такой фокус. Эльф пишет на доске последовательность из N цифр. Снегурочка закрывает одну цифру черным кружком. Затем входит Дед мороз. Его задача – отгадать закрытую цифру. При каком наименьшем N Дед мороз может договориться со снегурочкой так, чтобы фокус гарантированно удался? (Магией пользоваться запрещено!)
6. Неравенство треугольника. Внутри треугольника ABC периметра P взята точка O. Докажите, что $0.5P< AO+BO+CO<P$
7. Удвоение медианы. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120^o$. На сторонах AB и BC взяты такие точки E и F соответственно, что AE = EF = FC. Пусть M — середина AC. Найдите $\angle EMF$.
8. Индукция. 2m-значное число назовём справедливым, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом 2m+ 1-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное 2m-значное число было справедливым.
9. Принцип зацикливания. Принцип зацикливания назад
10. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту же комбинацию еще несколько раз.
11. Докажите, что для любого натурального n, в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов а) имеющих остаток 1 при делении на n б) делящихся на n.
12. Графы. Лемма о рукопожатиях. На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты – соседи, если они касаются друг друга).
13. Критерий эйлеровости графа
14. Определения дерева. Доказательство эквивалентности.
15. Подвешивание графа. В классе 30 человек, один из них Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно пять общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.
16. Формула суммы и разности n степеней. Даны 2000 чисел 11,101,1001, 10001, ... Докажите, что среди этих чисел меньше 20 простых.
17. Средняя линия треугольника. Параллелограмм Вариньона. Пусть K, L, M и N—середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника ABCD. Докажите, что $KM \leqslant (BC+ AD)/2$ причём равенство достигается, только если $BC \parallel AD$
18. Средняя линия трапеции. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC, опущены перпендикуляры BD и CE. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E.
19. Инвариант. В клетчатом квадрате $n\times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные — черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый, если
   а) n чётно
   б) n нечётно
   в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

20. Малая теорема Ферма.
21. Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое вида $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.
22. Функция Эйлера. Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
23. Теорема Эйлера.
24. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.
25. Пусть $a > 1$, $(a, b)=1$. Докажите, что найдется такое n, что $1+a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$ делится на b.
26. Теорема Вильсона.
27. Неравенство Коши.
28. На почте Васе дали коробку объемом 1. У него была веревка длины 6. Можно ли понять сможет ли Вася завязать свою коробку для надежности так что веревка будет крест накрест обхватывать всю коробку?
29. Для положительного a докажите, что $a^{10}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a}\geq 8$.
30. Для положительных a,b,c докажите, что $\frac{3}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)+24\geq 4\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$
31. Транснеравенство.
32. Дискретная непрерывность. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?
33. В некоторых клетках таблицы 50 × 50 расставлены числа -1 и 1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.
34. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Программа 9-10 класса.

1. Докажите, что для натурального $\sqrt{n}$ является рациональным числом тогда и только тогда, когда n — квадрат целого числа
2. Рациональными или иррациональными являются следующие числа:
3. а) 0,101001000100001... ; б) 0,123456789101112131415...?
4. Докажите, что на любом отрезке числовой прямой (сколь угодно малом) обязательно есть а) рациональное число; б) иррациональное число.
5. Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?
6. Докажите, что если $(a+b\sqrt{p})^n = A_n + B_n\sqrt{p}$, где p — произведение различных простых чисел, а числа a, b, A_n, B_n — рациональны, то $(a-b\sqrt{p})^n = A_n - B_n\sqrt{p}$.
7. Найдите первые 1000 знаков после запятой у следующих чисел
8. а) $(6+\sqrt{35})^{1999}$; б) $(6+\sqrt{37})^{2000}$.
9. Известно, что модули корней каждого из двух квадратных трёхчленов x^2+ax+b и x^2+cx+d меньше десяти. Может ли трёхчлен $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}$ иметь корень, модуль которого не меньше десяти?
10. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни – целые числа?
11. Свойства ортоцентра.
12. Степень точки относительно окружности. Радикальная ось. Радикальный центр трех окружностей
13. Дана неравнобокая трапеция ABCD (AB || CD). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали – в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.
14. На сторонах треугольника отмечены по две точки. Оказалось, что любые 4 точки, лежащие на двух сторонах треугольника, лежат на одной окружности. Докажите, что все 6 точек лежат на одной окружности.
15. Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.
16. Определение функции. Определение многочлена. Теорема Безу.
17. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - различные числа, и $P(a_i)=0$ для всех $i \leqslant k$, то P(x) делится на $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$.
18. Докажите, что у многочлена степени n не более n корней.
19. Дан многочлен F(x) четвёртой степени. Докажите, что прямая пересекает его график не более, чем в четырёх точках.
20. Докажите, что если значения двух многочленов совпадают во всех целых точках, то многочлены равны
21. Теорема о рациональном корне. Доказать, что если несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена P(x) с целыми коэффициентами, то P(x) = (qx — p)Q(x).
22. Пусть P(x) — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что P(a) - P(b) делится на a - b при всех целых a и b.
23. Многочлен P(x) с целыми коэффициентами таков, что в пяти различных целых точках его значение равно 5. Докажите, что ни в одной целой точке значение этого многочлена не может равняться 8.
24. Интерполяционный многочлен Лагранжа
25. Многочлен P степени 2017 с целыми коэффициентами принимает в 2017 целых точках значения ±1. Докажите, что многочлен P нельзя представить в виде произведения $P = Q_1 Q_2$, где Q_i -многочлены ненулевой степени с целыми коэффициентами.

26. Сто а) последовательных б) последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2+a_k x+b_k=0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?
27. Найдите сумму всевозможных произведений четного количества дробей $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{100}$
28. Двудольные графы. Сумма степеней одной доли. Критерий двудольности графа.
29. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2017х2017 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
30. Лемма о хороводах. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?
31. Планарные графы. Формула Эйлера. Неравенства для планарного графа.
32. а) Докажите, что полный граф на 5 вершинах не планарный.
    б) Есть три домика и три колодца. Можно ли соединить каждый домик с каждым колодцем тропинкой так, чтобы тропинки не пересекались?
33. Задача Рамсея. В полном графе с 17 вершинами некоторые рёбра покрасили в красный цвет, некоторые – в синий, а остальные – в зелёный. Докажите, что обязательно найдётся одноцветный треугольник.
34. Существование вневписанной окружности. Длины отрезков образованных точками касания.
35. В треугольнике ABC с углом A равным 120^o , провели биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 .
    а) Докажите, что $\angle B_1A_1C_1=90^o$. б) Найдите угол $\angle A_1C_1C$.
36. Восстановите треугольник по центрам трех его вневписанных окружностей.
37. Китайская теорема об остатках.
38. Число называется свободным от кубов, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого *n* найдется *n* последовательных чисел, не свободных от кубов.
39. Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.
40. В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
41. Алгоритм Евклида.
42. Найдите
    а) $(99!+100!, 101!)$;
    б) $(\underbrace{11\dots1}_{85}, \underbrace{11\dots1}_{151})$;
    в) $(\underbrace{11\dots1}_{n}, \underbrace{11\dots}_{m})$;
    г) $(2^n-1, 2^m-1)$;
    д) $\left(5^{2^{682}-1}-1, 5^{4^{500}-1}-1\right)$.
43. Докажите, что $(F_n, F_m)=F_{(n,m)}$, где F_n стоит на n-том месте в ряде Фибоначчи.
44. Окружность Эйлера. Прямая Эйлера.
45. Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5 ?
46. Перестановки. Тождественная перестановка, произведение перестановок, не коммуникативность, ассоциативность произведения. Обратная перестановка.
47. Разбиение на независимые циклы, разложение в произведение транспозиций.
48. Четность перестановки. Определение через инверсии и через транспозиции.
49. Задача про пятнашки.
50. Критерии описанности четырехугольника.
51. Лемма Холла
52. Задача Герона. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данной высотой, проведенной к этому основанию, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.
53. Счетные множества. Счетность целых и рациональных чисел. Несчетность отрезка [0,1].
54. Теорема Бойяи Гервина.