7-я Иранская олимпиада по геометрии

Продолжающие

30 октября 2020 г.

Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.ir

---

Задача 1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Точка M — середина отрезка AB. Точка N на отрезке CD такова, что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Докажите, что N — середина отрезка CD.

Задача 2. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$, O — центр его описанной окружности. Точка N — середина отрезка BC, точка M симметрична N относительно стороны AC. Точка T такова, что четырёхугольник $ANBT$ является прямоугольником. Докажите, что $\angle OMT = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC $(AC > AB)$ точка H — ортоцентр, M — середина отрезка BC. Медиана AM вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Прямая CH пересекает серединный перпендикуляр к отрезку BC в точке E и вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке F. Окружность ω проходит через точки X, E и F, точка J на ω такова, что четырёхугольник $BCHJ$ — трапеция $(CB \parallel HJ)$. Докажите, что прямые JB и EM пересекаются на ω.

Задача 4. Дан треугольник ABC. Произвольная окружность с центром в точке J, проходящая через точки B и C, пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Точка X такова, что треугольники FXB и EJC подобны (вершины соответствуют друг другу в указанном порядке), а точки X и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Аналогично точка Y такова, что треугольники EYC и FJB подобны (вершины соответствуют друг другу в указанном порядке), а точки Y и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC. Докажите, что прямая XY проходит через ортоцентр треугольника ABC.

Задача 5. Найдите все натуральные $n \geq 4$, для которых существует выпуклый многогранник с n гранями такой, что все его грани являются прямоугольными треугольниками.
(Обратите внимание, что угол между любой парой смежных граней выпуклого многогранника меньше $180°$.)

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается из 8 баллов.