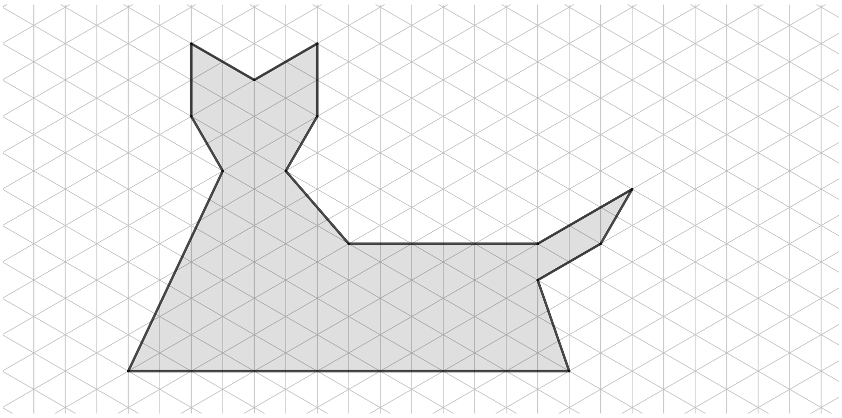
7-я Иранская олимпиада по геометрии

Начинающие

30 октября 2020 г.

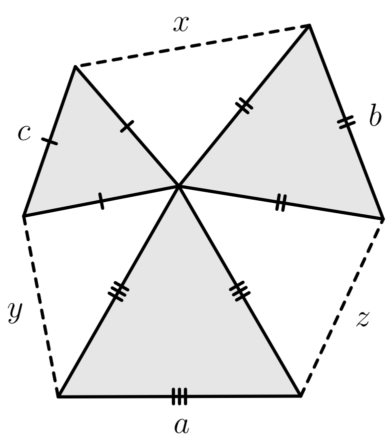
Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.ir

Задача 1. Под *сгибом* многоугольного листа бумаги будем подразумевать проведение на этом листе отрезка и последующее перегибание листа по нему. Рассмотрим лист бумаги со следующим рисунком. Разрежем бумагу по границе закрашенной области, чтобы получился лист в форме многоугольника.
Начните с этого закрашенного многоугольника и, сделав не более чем 5 сгибов, получите из него лист в форме прямоугольника. В качестве решения нарисуйте линии сгибов и форму листа после каждого сгиба.
(Обратите внимание, что линии сгиба не обязаны совпадать с линиями сетки.)



Задача 2. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AB \neq BC$). Точки E и G на прямой CD таковы, что AC является биссектрисой каждого из углов EAD и BAG. Прямая BC пересекает AE и AG в точках F и H соответственно. Докажите, что прямая FG проходит через середину отрезка HE.

Задача 3. Три равносторонних треугольника с длинами сторон a, b, c, расположенные, как показано на рисунке, имеют общую вершину и не имеют других общих точек. Определим длины x, y, z, как показано на рисунке. Докажите, что $3(x + y + z) > 2(a + b + c)$.



Задача 4. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Прямые BP и CP пересекают AC и AB в точках E и F соответственно. Точки K и L — середины отрезков BF и CE соответственно. Прямые, проходящие через L и K параллельно CF и BE, пересекают BC в точках S и T соответственно. Обозначим через M и N точки, симметричные S и T относительно точек L и K соответственно. Докажите, что прямая MN проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P.

Задача 5. Скажем, что две вершины простого многоугольника *видны* друг из друга, либо если они соседние, либо если соединяющий их отрезок целиком лежит внутри многоугольника (за исключением двух концов, лежащих на границе). Найдите все натуральные n такие, что существует простой многоугольник с n вершинами, в котором каждая вершина видна ровно из четырёх других вершин.
(Простой многоугольник — это несамопересекающийся многоугольник без дырок.)

Продолжительность олимпиады: 4 часа.
Каждая задача оценивается из 8 баллов.